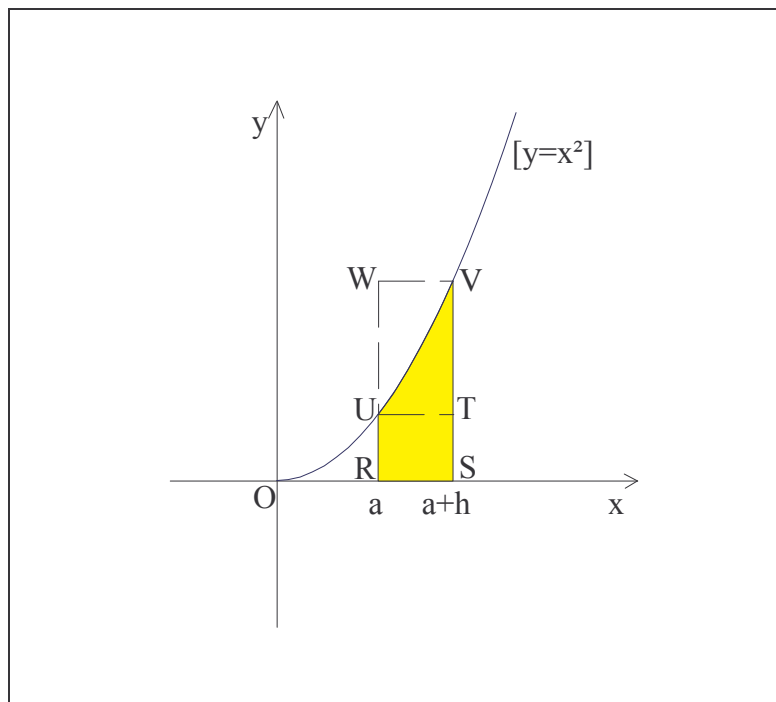


# Des aires ... à l'intégrale.





« Dans l'enseignement, il faut commencer par les objets mentaux pour aboutir aux concepts. »

« Si un élève en reste aux objets mentaux, il part avec un bagage sérieux . »

A. Freudenthal (1983)

## Plan du mémoire

|                                                                                                                 |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction.....</b>                                                                                        | <b>1</b>  |
| <b>Chapitre I.....</b>                                                                                          | <b>3</b>  |
| I. Approche de la notion d'aire à l'école élémentaire .....                                                     | 3         |
| 1) Appréhension de la notion d'aire.....                                                                        | 3         |
| 2) Appréhension des relations numériques.....                                                                   | 5         |
| 3) Conclusion.....                                                                                              | 6         |
| II. Comment retrouver les formules à l'aide de découpages " judicieux ": L'art<br>de comprendre une figure..... | 7         |
| 1) Préliminaire: l'unité d'aire.....                                                                            | 7         |
| 2) Aire d'un rectangle .....                                                                                    | 7         |
| 3) Aire d'un parallélogramme .....                                                                              | 10        |
| 4) Aire d'un triangle.....                                                                                      | 10        |
| 5) Aire d'un trapèze.....                                                                                       | 11        |
| 6) Aire d'un polygone .....                                                                                     | 11        |
| III. Le théorème de Pythagore : des aires qui glissent progressivement.....                                     | 12        |
| 1) La projection .....                                                                                          | 13        |
| 2) Une description d'élève .....                                                                                | 13        |
| 3) Le glissement.....                                                                                           | 14        |
| 4) La démonstration du théorème .....                                                                           | 14        |
| 5) Conclusion.....                                                                                              | 15        |
| 6) Prolongements: autre démonstration, propriétés de Thalès.....                                                | 16        |
| <b>Chapitre II .....</b>                                                                                        | <b>17</b> |
| I. Une approche possible dès la première .....                                                                  | 17        |
| 1) Quadrature d'un arc de parabole.....                                                                         | 17        |
| 2) Le problème.....                                                                                             | 18        |
| 3) Le découpage.....                                                                                            | 19        |
| 3) Conclusion.....                                                                                              | 20        |
| 4) Vers l'intégrale.....                                                                                        | 21        |
| II. Une introduction de l'intégrale .....                                                                       | 22        |
| 1) Activité préparatoire à la notion d'intégrale présentée en T D .....                                         | 22        |
| 2) Une approximation possible: découpage laminaire, somme infinie.....                                          | 25        |
| <b>Chapitre III .....</b>                                                                                       | <b>26</b> |
| I. Une aire entre deux courbes .....                                                                            | 26        |
| II. Une application à l'électricité .....                                                                       | 27        |
| III. Un calcul de grandeur géométrique .....                                                                    | 29        |
| IV. L'intégration, outil performant de l'analyse .....                                                          | 30        |
| <b>Conclusion .....</b>                                                                                         | <b>33</b> |
| <b>Bibliographie .....</b>                                                                                      | <b>34</b> |
| <b>Remerciements .....</b>                                                                                      | <b>35</b> |
| <b>Annexes .....</b>                                                                                            | <b>36</b> |

## Introduction

---

" Du choix d'un tel sujet "

Ce mémoire est le fruit de deux ans de travail. Commencé pendant l'année de préparation au concours du CAPES, il a mûri et évolué tout au long de ces mois. Au tout début, il correspondait à notre thème d'étude : Aires et Volumes. En fixant l'objet d'étude, nous nous étions alors demandé, en quoi les découpages des aires dans les classes du collège pouvaient ou non amener la notion d'intégrale en classe de terminale. Aussi, quand au début de cette année, nous avons dû proposer un thème pour le mémoire, c'était pour nous une évidence: il fallait poursuivre et approfondir nos recherches. Pendant neuf mois, il a été nécessaire d'effectuer des choix et de faire des coupes pour centrer notre approche sur notre expérience professionnelle. Ceci n'a pas toujours été facile, toutefois nous avons voulu atteindre trois objectifs.

En premier lieu, nous nous sommes demandés, comment faire pour que les notions et les formules sur les aires ainsi que les notions sur l'intégrale ne soient pas révélées comme une science venant du professeur , mais plutôt comme une science qu'ils se sont construites au fur et à mesure de leur parcours. Ainsi, au collège, nous avons conçu une découverte de la notion d'aire à l'aide de découpages -" figure puzzle "- qui amène à retrouver les formules d'aires - cette approche rejoignant celle appréhendée à l'école élémentaire. Il est en effet surprenant de voir qu'à l'issue de la troisième, les élèves ne retiennent bien souvent de la notion d'aire que les quelques formules usuelles, "plus ou moins erronées".

Nous avons ensuite voulu introduire la notion d'intégrale dans un contexte riche et varié. Nous sommes en effet surpris de voir comment cette notion est introduite en classe de terminale. Ainsi, dans un premier temps l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle est étudiée sous l'angle des primitives puis le lien intégrale/aire est vu en travaux pratiques. Cette approche ne nous semble pas satisfaisante. Elle privilégie en effet l'aspect analytique et fonctionnel de l'intégrale aux dépens de l'aspect géométrique. Les élèves acceptent ainsi l'outil intégrale en tant que tel, puis le lien avec les aires également, alors qu'une approche contraire - partir des aires puis arriver à l'intégrale - leur permettrait de sentir et visualiser l'utilité et la richesse potentielle de cette nouvelle notion avant de découvrir les différentes propriétés qui s'y rattachent.

Nous avons enfin essayé de permettre aux élèves de prendre conscience d'acquis méthodologiques de recherche. A cet effet, nous avons cherché à effectuer des activités variées où la démarche de recherche puisse se développer. Nous avons ainsi voulu revenir régulièrement à la caractérisation même de l'aire comme étant égale au nombre de "carrés" nécessaires pour recouvrir une portion de plan limitée. Ce retour à la définition a pour objectif de permettre aux élèves de construire à partir d'éléments simples une notion plus riche.

Nous essaierons donc de voir comment la notion d'aire est abordée - et ceci dès l'école élémentaire - en montrant quelles peuvent être les limites des formules usuelles découvertes au Collège quand elles réduisent la recherche d'aire à un simple problème algébrique. Puis nous aborderons le concept d'intégrale en montrant que cette notion peut très bien être ébauchée dès la classe de première en utilisant les suites pour appréhender la notion d'aire curviligne comme limite d'aires rectilignes. Nous montrerons enfin comment l'intégrale est un outil performant pour le calcul des aires mais aussi en quoi les connaissances sur les aires peuvent être précieuses dans certains calculs d'intégrale. Cette "complémentarité" nous semble être intéressante à souligner, l'outil aire étant souvent délaissé au profit des formules ou des calculs analytiques.

Nous baserons nos propos sur des observations effectuées en classe de quatrième, de seconde, de première E et de Terminale C et D - observations effectuées au cours de la première et de la deuxième année d'I.U.F.M. Les exercices non observés serviront à étayer notre réflexion et à élargir nos investigations.

## Chapitre I

---

De la découverte de la notion d'aire à l'école élémentaire  
à l'élaboration des "formules usuelles" et la manipulation d'aires.

### I. Approche de la notion d'aire à l'école élémentaire

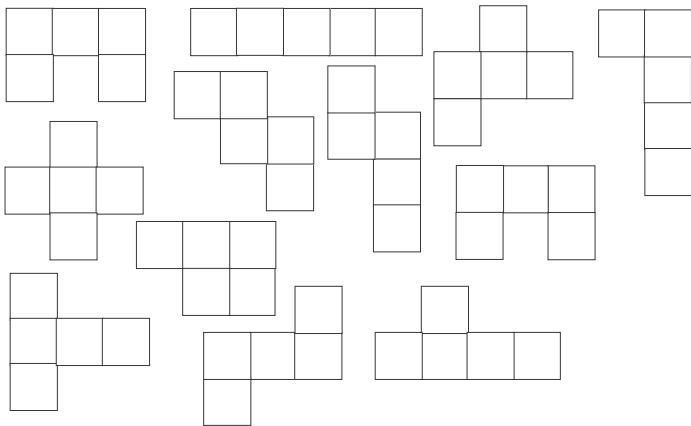
Nous avons été agréablement surpris en nous plongeant dans des livres des classes de CM1 et CM2 de voir que la notion d'aire est étudiée, non pas uniquement comme une succession de formules, mais plutôt comme étant égale au nombre de carrés nécessaires pour recouvrir une portion de plan limitée par une ligne fermée. C'est pourquoi dans de nombreux exercices, on se donne un carré de base et on mesure l'aire de différentes surfaces en fonction de l'aire de ce carré.

On doit donc définir l'unité d'aire comme étant la grandeur d'un carré dont le côté a pour longueur  $u$ , elle est notée  $u^2$ .

Voici quelques exercices significatifs, que nous avons extraits des livres scolaires de la collection Classiques Hachette par R. Eiller : "Math et Calcul" en CM1 ou CM2, mis à part l'exercice 3.

#### 1) Appréhension de la notion d'aire

##### Exercice 1: CM2

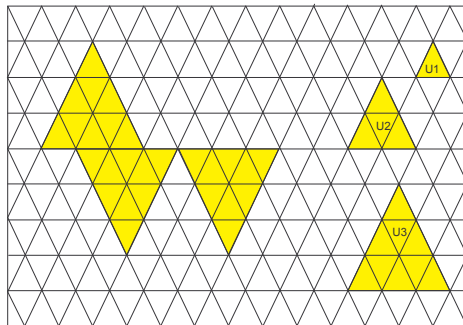


1°) Vérifier que tous les assemblages *différents* de cinq carrés sont représentés ci-dessous.

Les assemblages ont des formes différentes, mais ils comprennent tous le même nombre de carrés.  
On dit qu'ils ont même aire.

Exercice 2: CM1

Nathan entraînement CM1. Pierre Clin et Jean Louis Glaser Avril 1993

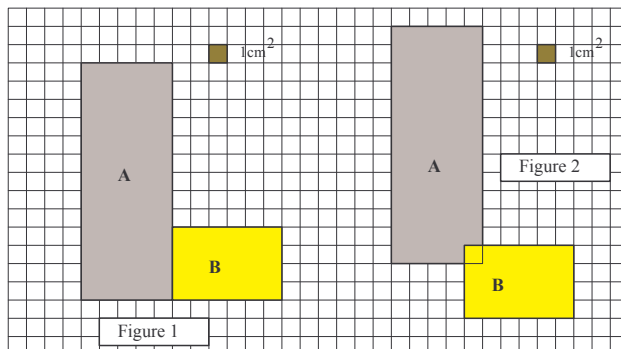


| Unité d'aire | Mesure de l'aire |
|--------------|------------------|
| U1           |                  |
| U2           |                  |
| U3           |                  |

Ecrire dans le tableau ci-contre l'aire de ces dessins selon chacune des unités.

Ce type d'exercice fait travailler sur une unité d'aire représentée par une figure autre que le carré.

Exercice 3: CM1



Découvertes:

Observe les figures 1 et 2 ci-contre.

a) Trouve dans chaque cas la mesure de l'aire de la surface grisée.

b) Trace les rectangles A et B sur une feuille quadrillée de telle sorte qu'ils aient 2 carrés communs et trouve la mesure de l'aire de la surface grisée.

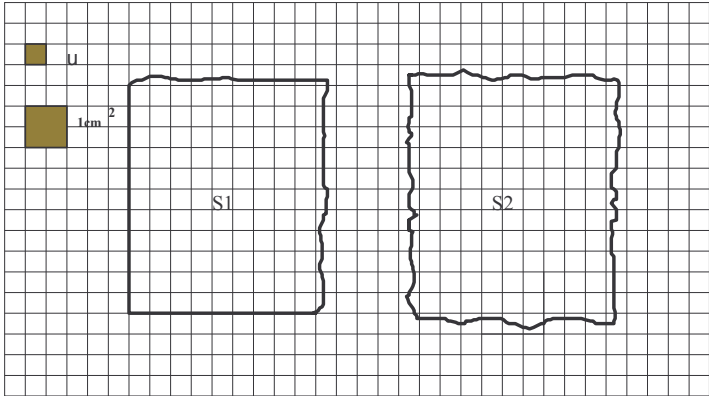
c) Même travail si les deux rectangles ont 3,4,5,6,8 ou 9 carrés communs.

Pour cela reproduis et complète le tableau ci dessous.

| Aire du rectangle A. | Aire du rectangle B. | Nombres de carrés communs. | Aire de la surface grisée. |
|----------------------|----------------------|----------------------------|----------------------------|
|                      |                      |                            |                            |
|                      |                      |                            |                            |
|                      |                      |                            |                            |

Cet exercice nous a frappé car il illustre des notions de la théorie des ensembles et des notions de la théorie de la mesure.

#### Exercice 4: CM2



L'unité d'aire étant le  $\text{cm}^2$ , trouver l'encadrement de la mesure de l'aire de chacune des surfaces S1 et S2.

Faire le même travail en prenant comme unité le carré u.

Cet exercice met en relief l'impossibilité de "découper", paver, une surface délimitée par une ligne courbe.

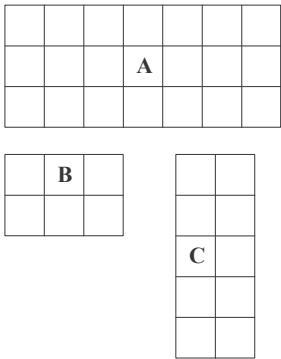
Ainsi il débouche sur une méthode d'évaluation de l'aire de cette surface : encadrer par deux nombres entiers l'aire en question.

## 2) Appréhension des relations numériques

Bien sûr, on commence à mettre en place les formules usuelles: celles de l'aire du rectangle, du carré, du triangle. Mais ceci se fait dans des cas très précis, où les longueurs des côtés sont des entiers.

En voici deux exemples qui nous ont semblé caractéristiques du côté expérimental et pratique des classes élémentaires.

#### Exemple1: CM1



|                     | Rectangle |   |   |
|---------------------|-----------|---|---|
|                     | A         | B | C |
| Nombre de carreaux  |           |   |   |
| Longueur en cm : L  |           |   |   |
| Largueur en cm : l  |           |   |   |
| Aire : $L \times l$ |           |   |   |

👉 Observe les rectangles, puis complète le tableau que tu reproduiras.

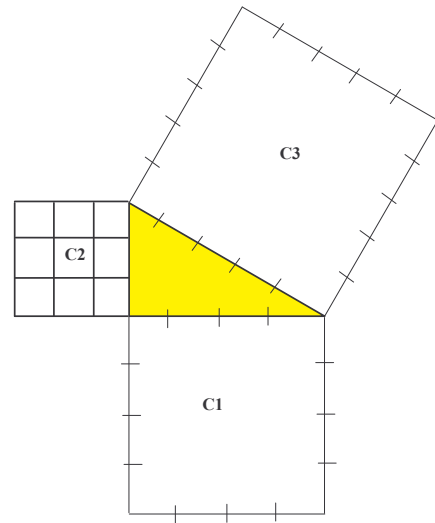
Cet exercice propose d'observer le lien entre le comptage de carreaux, les mesures des longueurs des côtés des rectangles et la mesure de l'aire de ces surfaces rectangulaires.

Exemple 2: CM1

Trouve la mesure en cm du côté de chacun des carrés C1, C2, C3, puis complète le tableau que tu auras reproduit.

|    | Mesure du côté<br>( en cm ) | Mesure de l'aire<br>( en $\text{cm}^2$ ) |
|----|-----------------------------|------------------------------------------|
| C1 |                             |                                          |
| C2 |                             |                                          |
| C3 |                             |                                          |

Dis ce que tu constates.



Le théorème de Pythagore peut être abordé comme une relation remarquable concernant un triangle rectangle. Sa connaissance n'est pas un objectif. Mais sa pertinence est déjà mise en évidence grâce aux aires. ( voir III page 12)

### 3) Conclusion

Comme le précise le "*Complément aux Programmes et Instructions de l'école élémentaire de 13 mai 1985 concernant les activités géométriques*", "l'enseignement des mathématiques fait acquérir des connaissances et des compétences dans le domaine numérique et géométrique, tout en aidant l'élève à se forger des méthodes de travail. Il stimule l'imagination". "Résoudre des problèmes suppose la maîtrise d'un certain nombre d'outils numériques et géométriques, et l'appropriation de méthodes".

Par ailleurs, dans la brochure "*Les cycles à l'école primaire*" dans la collection "une école pour l'enfant, des outils pour les maîtres", la description du cycle 3 sur la mesure affirme clairement: '*Il maîtrisera les notions d'aire et de volume et connaîtra les unités les plus couramment utilisées (...). Il sera capable de calculer le périmètre et l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un disque, et saura utiliser un formulaire.*'

Cependant, aux vues des résultats de l'évaluation à l'entrée en sixième, on peut se demander si l'aspect calculatoire de la notion d'aire n'est pas mis en avant au détriment de la perception visuelle et pratique de l'aire : un objet mental (on se référera à l'annexe page V concernant l'évaluation en sixième)

## **II. Comment retrouver les formules à l'aide de découpages " judicieux " : L'art de comprendre une figure**

Il nous a semblé important de montrer comment on peut retrouver les différentes formules sur les aires appréhendées au collège en partant de l'aire d'un carré de base. L'important étant d'en garder une image mentale pratique.

En effet, nous avons constaté que pour beaucoup d'élèves les formules d'aire s'accumulent sans liens les unes avec les autres. Par exemple, s'il faut retrouver la formule de l'aire d'un trapèze, on constate très vite que pour beaucoup cela relève d'un exploit.

Nous allons dans cette partie reprendre l'élaboration des formules, et voir s'il est possible d'effectuer cette présentation au collège ou au lycée.

Pour certaines formules, aire du triangle, du trapèze, du polygone, nous avons pu expérimenter dans plusieurs classes, nous donnerons en parallèle nos diverses observations.

### **1) Préliminaire: l'unité d'aire**

Par convention, l'unité d'aire est l'aire du carré qui a pour côté l'unité de longueur.

( Nous ne nous étendons pas sur le problème de l'unité qui entre dans le problème de la mesure et des unités des différentes mesures, mais c'est un problème.)

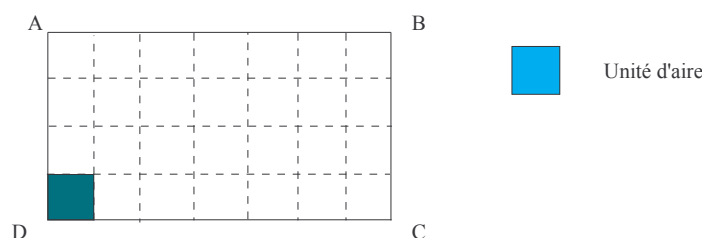
### **2) Aire d'un rectangle**

trois cas se présentent:

- a) Les côtés sont mesurés par des nombres entiers.
- b) Les côtés sont mesurés par des nombres fractionnaires  $a$  et  $b$ .
- c) Les côtés sont incommensurables.

a) Les côtés sont mesurés par des nombres entiers.

Soit le rectangle ABCD, avec  $AB=a$  et  $BC=b$ ,  $(a,b) \in \mathbb{A}^2$ .



On peut alors placer côte à côte, le long de  $[AB]$ , des carrés ayant pour côté l'unité de longueur.

On forme ainsi une bande qui contient  $a$  carrés.

On pourra ainsi placer  $b$  bandes. ( sur la figure ci-dessus,  $a=7$  et  $b=4$  )

On a alors découpé le rectangle en  $a.b$  carreaux égaux à l'unité d'aire.

|                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------|
| <i>L'aire <math>S</math> du rectangle vaut <math>S = a.b</math></i> |
|---------------------------------------------------------------------|

☞ On remarque que cette approche correspond exactement à ce qui est présenté à l'école primaire. ( Voir Exercice 1 page 4 )

b) Les côtés sont mesurés par des nombres fractionnaires a et b.

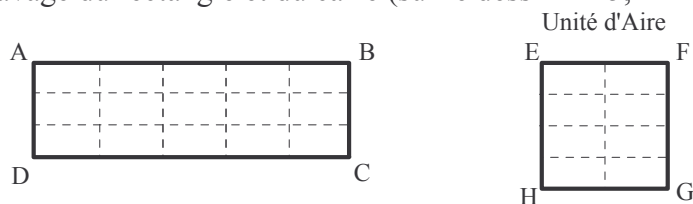
On veut mesurer l'aire du rectangle ABCD en prenant le carré EFGH comme carré unité.

Soit  $a = \frac{m}{n}$ ,  $b = \frac{p}{q}$  les longueurs des côtés de ABCD.

En divisant [EF] en n parties égales, [AB] contient m de ces parties.

En divisant [FG] en q parties égales, [BC] contient p de ces parties.

En menant par les différents points de division des parallèles aux côtés du rectangle ou du carré, on réalise un pavage du rectangle et du carré (sur le dessin m=5, n=2, p=3, q=4)



Le rectangle ABCD est pavé de mp rectangles partiels et le carré EFGH de nq rectangles partiels. Les rectangles partiels sont *égaux*.

$$S = \frac{mp}{nq} = \frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = ab$$

L'aire du rectangle ABCD est donc:

$S = a.b$

☞ Nous avons pu expérimenter sur des exemples simples cette approche au collège en classe de 4ème. ( Exemple  $a = \frac{5}{2}$ ,  $b = \frac{3}{4}$  ci dessus.). C'est en effet l'occasion de faire un lien entre Géométrie et Algèbre.

Les difficultés rencontrées par les élèves sont liées essentiellement au changement de registre ou de statut des différentes données. En effet, le rapport  $\frac{m}{n} = a$  est difficile à appréhender. Il peut être conçu en tant que nombre pur, en tant que rapport de nombres ou en tant que rapport de grandeurs.

Il n'est pas sûr que les élèves perçoivent comme membre de la même famille (grandeurs mesurées par un nombre) m, n ou 4, 7, AB ... Ils ont alors du mal à comprendre pourquoi on peut en faire le rapport ou pourquoi on peut les comparer. On retrouvera d'ailleurs ce type de difficulté autour d'une activité introduisant la notion d'intégrale, observée en terminale D ( Voir page 23 et annexe page VII)

Au départ, il était aussi difficile de montrer l'intérêt de retrouver le résultat général: " L'aire d'un rectangle est égale au produit de la longueur par la largeur ". Ils connaissent la formule, c'est donc vrai... On verra que, par la suite, dans le cas du trapèze et du polygone, découper est une nécessité car les formules sont moins évidentes.

c) Les côtés sont incommensurables.

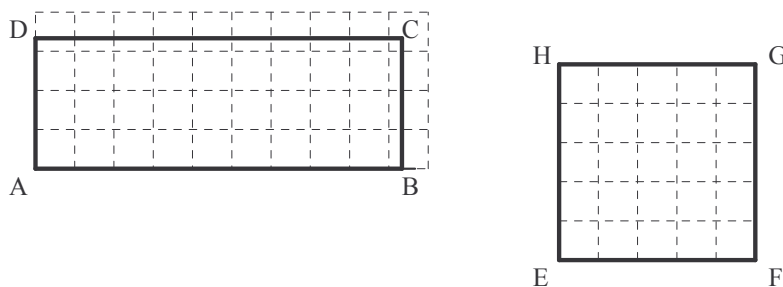
Supposons qu'ayant divisé l'unité de longueur en  $q$  parties égales, le côté  $[AB]$  contienne  $m$  de ces parties et n'en contienne pas  $m+1$ , que le côté  $[BC]$  contienne  $n$  de ces parties mais pas  $n+1$ ;

De sorte que les mesures  $a$  et  $b$  de ces côtés sont telles que l'on ait :

$$\frac{m}{q} < a < \frac{m+1}{q} \quad \text{et} \quad \frac{n}{q} < b < \frac{n+1}{q}$$

Par le même procédé que précédemment, on divisera le carré unité en  $q^2$  carrés partiels et le rectangle contiendra  $mn$  de ces carrés mais n'en contiendra pas  $(m+1)(n+1)$ .

Sur la figure , on a  $q=5$ ,  $m=9$ ,  $n=3$ .



Si  $S$  est l'aire du rectangle, on a donc:

$$\frac{mn}{q^2} < S < \frac{(m+1)(n+1)}{q^2}$$

Or 
$$\frac{mn}{q^2} < ab < \frac{(m+1)(n+1)}{q^2}$$

On a donc  $|S - ab| < \frac{(m+1)(n+1) - mn}{q^2}$  ou  $|S - ab| < \frac{m+n+1}{q^2}$

et comme  $m < aq$  et  $n < bq$ , on a :  $|S - ab| < \frac{(a+b)q+1}{q^2}$

Soit  $|S - ab| < \frac{a+b}{q} + \frac{1}{q^2}$ .

On peut alors prendre  $q$  assez grand pour que la différence  $|S - ab|$  soit aussi petite que l'on voudra; Comme  $S$  et  $ab$  sont deux nombres bien déterminés, cela n'est possible que si on a:

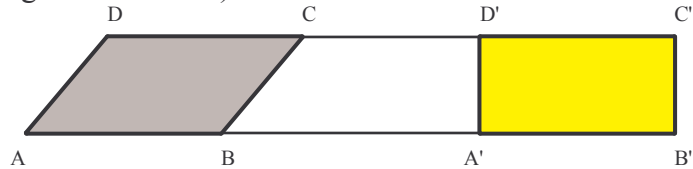
$$S = ab$$

Remarque: Nous n'avons pas exploité ceci en classe, les compétences nécessaires étant nettement supérieures à celles exigibles au collège. Par ailleurs, au lycée, une telle reprise en main est trop formaliste. La perception des nombres ne permet pas à un élève de comprendre la notion d'incommensurabilité: les nombres sont sensés représenter une mesure qui lui semble toujours accessible. Il y a donc encore une étape à franchir : le passage à la limite.

### 3) Aire d'un parallélogramme

Soit le parallélogramme ABCD.

On prolonge les côtés (AB) et (DC) dans le même sens et on coupe la bande obtenue par deux perpendiculaires suffisamment éloignées pour ne pas traverser l'intérieur du parallélogramme (voir figure ci-dessous).



Soient (A'D') et (B'C') ces deux perpendiculaires que nous supposons telles que  $AB = A'B'$ . Les deux trapèzes rectangles AA'D'D et BB'C'C sont *égaux* (superposables par la translation de vecteur  $\vec{AB}$ ), ils ont donc même aire.

Si on retranche de ces deux trapèzes, le trapèze rectangle BA'D'C, les deux domaines restants, le parallélogramme ABCD et le rectangle A'B'C'D', ont même aire.

On a alors :

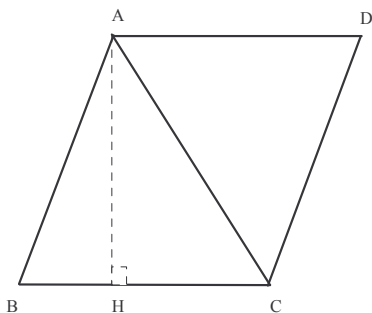
*L'aire d'un parallélogramme est égale au produit des mesures de sa base et de sa hauteur.*

↳ Nous avons exploité ceci en classe de quatrième au cours d'un devoir maison. (Voir Annexe page VII). Dans ce devoir, les élèves devaient retrouver la formule donnant l'aire, du parallélogramme, du triangle et du trapèze, à partir de celle donnant l'aire du rectangle. Ce type de problème n'est pas évident pour des élèves de quatrième. Ils sont en effet obligés de faire abstraction des formules qu'ils connaissent ou qu'ils peuvent retrouver dans des formulaires, pour essayer de les retrouver par eux mêmes.

Cette démarche les trouble, c'est pourquoi par exemple, bon nombre d'entre eux pour démontrer que l'aire du parallélogramme ABCD et l'aire du rectangle A'B'C'D' sont égales, ont appliqué les formules donnant l'aire de ces deux figures. " Comme le parallélogramme et le rectangle ont pour base B et pour hauteur h, ABCD et A'B'C'D' ont même aire ". Bien souvent, ils ne précisent pas la base, la hauteur, la largeur (...), se contentant simplement de préciser que les formules donnent le résultat demandé.

NB: Un élève ( sur 26 ) a trouvé le résultat en découpant de façon judicieuse la figure.

### 4) Aire d'un triangle



Soit un triangle ABC.

On mène par A la parallèle à (BC) et par C la parallèle à (AB). On forme ainsi un parallélogramme ABCD que la diagonale [AC] divise en deux triangles 'égaux'.

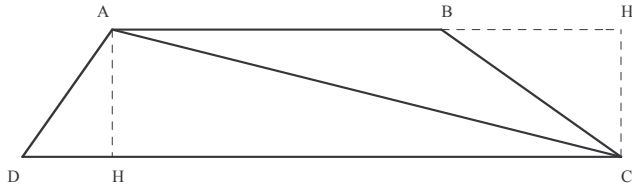
On retrouve alors:

*L'aire d'un triangle est égale au demi-produit des mesures de sa base et de sa hauteur.*

↳ Dans le devoir, les élèves ont eu des difficultés à retrouver l'aire du triangle. Un cinquième d'entre eux a d'ailleurs répondu que l'aire du triangle est donné par : Base x hauteur. Ils ne pensent pas à comparer l'aire du parallélogramme ainsi construit à l'aire du triangle

initial. Pourtant, au cours de la correction, il leur a semblé évident que l'aire du triangle est la moitié de celle du parallélogramme. Le fait d'algébriser est sans doute l'une des clefs qui expliquent l'erreur commise.

### 5) Aire d'un trapèze



La diagonale [AC] divise le trapèze en deux triangles :

- ACD de base [CD] et de hauteur (AH)
- ACB de base [AB] et de hauteur (CH')

Comme  $AH=CH'$ , l'aire du trapèze est :

$$S = \frac{CD \times AH}{2} + \frac{AB \times AH}{2} = \frac{AH(CD + AB)}{2}$$

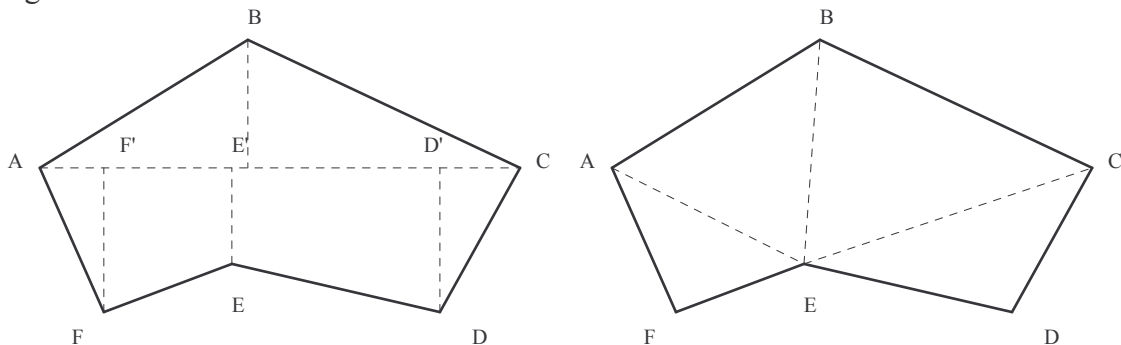
d'où:

*L'aire d'un trapèze est égale au demi-produit des mesures de la somme de ses bases et de sa hauteur.*

↳ les élèves n'ont pas rencontré de problèmes pour comprendre la méthode à adopter. Il est vrai que le découpage du trapèze en deux triangles était donné. Pourtant pour près de la moitié des élèves, l'élaboration des formules a été faussée par le fait qu'ils ne spécifient pas les hauteurs et les bases. " Le triangle ABC a pour aire  $Bxh/2$  et l'aire du triangle ABD est  $Bxh/2$ , donc... ". La formule générale semble suffire à leur démonstration.

### 6) Aire d'un polygone

Pour évaluer l'aire d'un polygone quelconque, on la décompose en somme ou en une différence d'aires que l'on sait calculer. On se ramène ainsi, par des découpages judicieux, à des figures élémentaires dont on sait calculer l'aire.



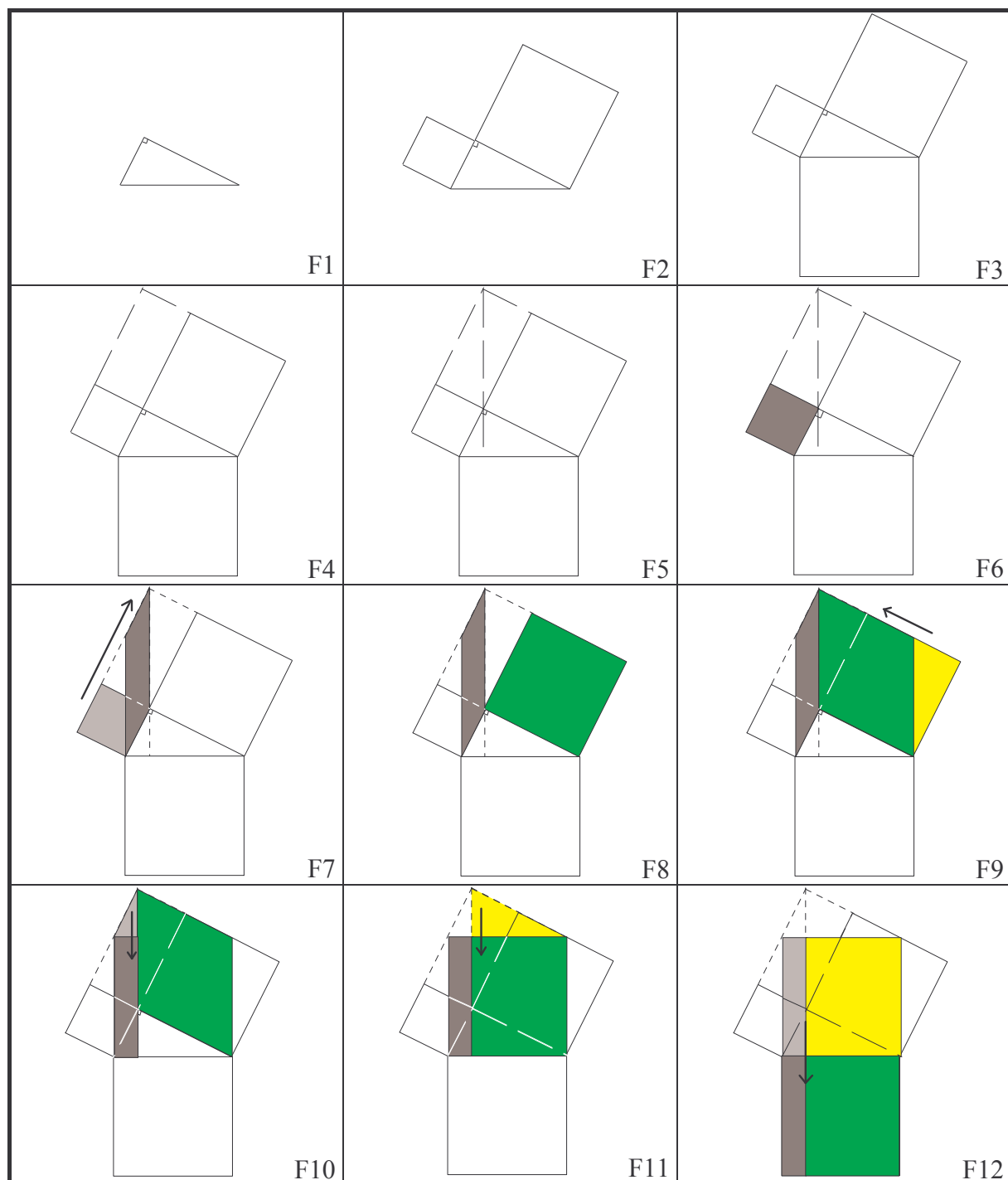
↳ Un exercice similaire a été proposé avec un quadrilatère et un hexagone; il a été résolu essentiellement de façon géométrique. Il a été intéressant de voir les différents découpages. Ainsi deux élèves ( sur 26 ) ont pensé à découper en triangles et trapèzes , d'autres ( 14 ) ont effectué des découpages en triangles. Ces découpages ne sont pas tous astucieux mais ils nous ont permis de voir qu'un pas été franchi. Les élèves ont pris l'initiative de découper, comprenant que c'est la seule façon de connaître l'aire de ces polygones.

NB: 10 élèves n'ont pas répondu à cette question.

### III. Le théorème de Pythagore : des aires qui glissent progressivement

Lors des stages en collège effectués en première année d'I.U.F.M., nous avons pris conscience du caractère très visuel, et parfois ludique, de certaines démonstrations du théorème de Pythagore. Lors de rencontres avec notre directeur de mémoire, nous nous sommes intéressés à un petit film vidéo de deux minutes réalisé par l'IREM de Lille. Il présente le théorème de Pythagore par une méthode originale utilisant des aires. La séquence s'appelle "Glissements Progressifs".

Voici les douze plans principaux du film, l'intérêt résidant essentiellement dans l'animation rendue possible par la vidéo ( ou l'informatique, autre support possible ).



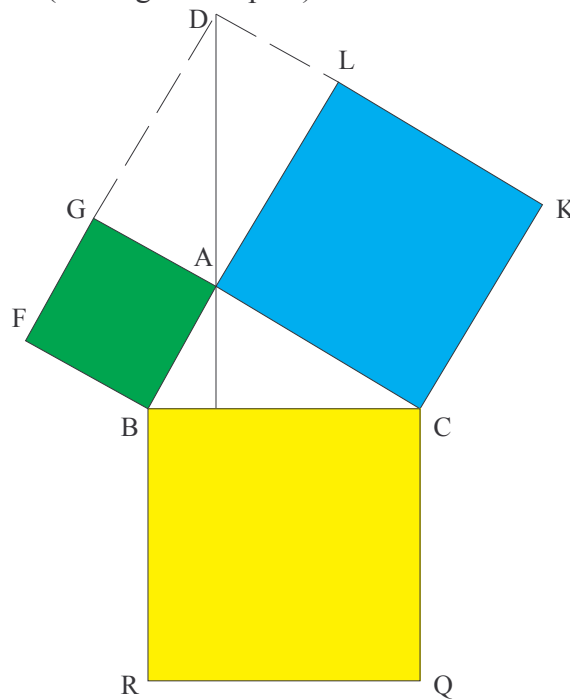
Une séquence finale du film présente l'animation de la figure F3 coloriée, en faisant varier la position du sommet de l'angle droit suggérant ainsi la généralité du résultat. ( le sommet se promène sur un demi-cercle non-représenté, de diamètre l'hypoténuse du triangle rectangle )

En annexe, nous proposons une activité autour de ce film présentée dans une autre classe de quatrième. Il utilise en plus un support écrit pour fixer l'attention des élèves et aider à la verbalisation de l'animation.

### 1) La projection

Le film a été projeté dans deux classes de quatrième de notre directeur de mémoire. La séance est bâtie en trois parties : Projection du film au magnétoscope; Discussion et mise en relief des problèmes mathématiques; Démonstration de ce qui le nécessite.

A la suite de la première projection, il est clair pour les élèves que le film a montré, voire "démontré", que *"l'aire formée par les deux petits carrés construits sur le triangle est la même que l'aire du grand carré"*. (voir figure ci-après)



La somme des aires de ACFG et ACKL est égale à l'aire de BCQR.

### 2) Une description d'élève

Dans la deuxième classe, qui a plus de difficultés mathématiques, qui se disperse plus dans ses réactions et ses raisonnements, un élève a décrit l'animation en disant : on a *"rempli les carrés vert et bleu sans que ça déborde "...ça remplit le grand carré sans déborder"*.

Il semble parler plus du remplissage d'un récipient par un liquide que du coloriage d'une surface. La description d'une aire par coloriage est pratique car elle fait ressortir la notion d'étendue plane. Le liquide fait plus référence à un volume.

Peut-être est-ce aussi dû à ce que la peinture une fois étalée est figée et n'est pas mobile, alors qu'un liquide se déforme. Par ailleurs, la séquence F12 suggère un peu ce remplissage :

l'animation fait rentrer la surface formée de la réunion des 2 rectangles dans le carré. ( Cela ressemble à un transvasement. A noter que cette expérience est faite à "La cité des Sciences et de l'Industrie de La Vilette" à Paris )

La présence de pointillés dans la vidéo a amené certains élèves sur une représentation en perspective de volumes. Peut-être aurait-il fallu mettre des lignes en trait-point-trait pour éviter une confusion dommageable.

### 3) Le glissement

L'intérêt même du film vidéo est de faire voir aux élèves le glissement progressif de l'aire du carré vers l'aire du parallélogramme ( séquence F7 ).

Dès la cinquième, les élèves peuvent avoir une vision mobile du parallélogramme : un rectangle articulé. Cependant dans cette articulation l'aire de départ n'est pas conservée.

Ici, on utilise le parallélogramme du point de vu du parallélisme : "*On déplace un côté parallèlement à l'autre.*". C'est ce qu'on appelle *glissement*

Ce glissement est une transformation au sens premier du terme - un carré est transformé en un parallélogramme (propre). C'est quelque chose de nouveau par rapport aux isométries - voir les mots déplacement et antidéplacement - qui transportent les figure mais conservent la forme, les longueurs et les aires. Ici seule l'aire est conservée.

*"On déplace un côté parallèlement à l'autre. On garde donc la même hauteur et par suite la même aire."* On sent chez les élèves qu'il y a référence à la formule "*base fois hauteur*", même si en fait, personne n'a prononcé cette formule "*magique*".

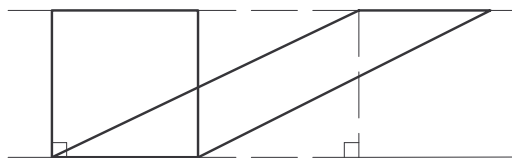
Les élèves réussissent à dépasser le couple (aire, formule de calcul) pour ne retenir et visualiser que le couple (aire, glissement), ce que le film suggère : on glisse en gardant la même aire.

### 4) La démonstration du théorème

Du point de vue de la démonstration mathématique, jusqu'ici il n'y a pas de problème.

Les hauteurs qui interviennent peuvent être mise en relief en construisant un rectangle. On retrouve ainsi un théorème d'Euclide :

" Si deux parallélogrammes ont un côté commun et les côtés opposés sur une même droite, ils ont la même aire".



Ce théorème s'applique à nouveau pour la séquence F10 : le parallélogramme glisse vers un rectangle.

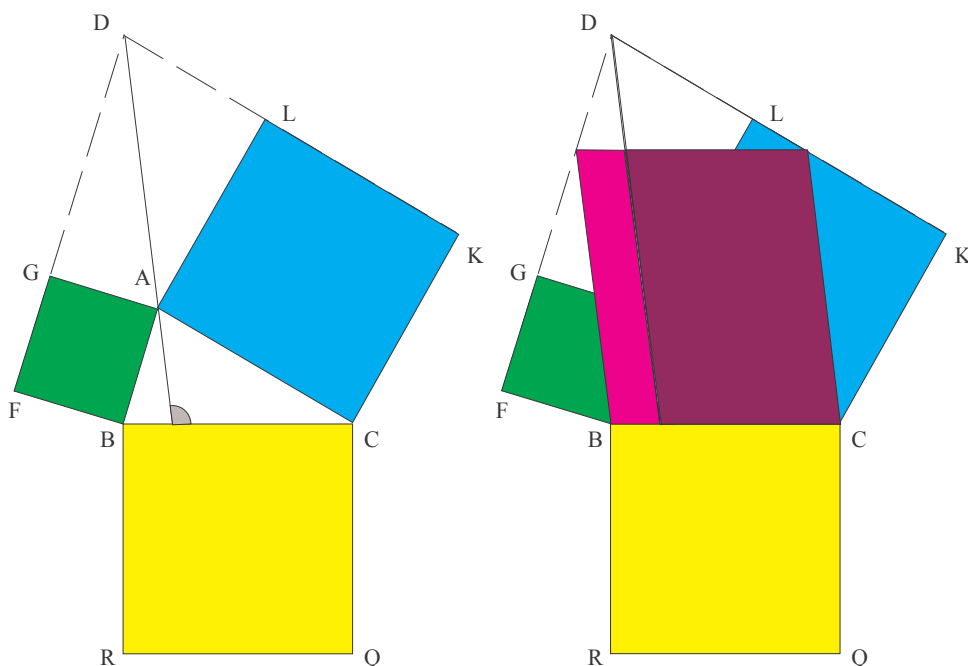
Cependant un questionnement plus poussé fait ressortir un problème : pourquoi est-ce un rectangle ? Il semble que la droite passant par A et D tombe sur [BC] perpendiculairement, ce qui permet d'avoir la démonstration de la séquence F12.

Deux difficultés:

- la première est liée au problème de la démonstration en quatrième. Quelques irréductibles finissent par concéder que ça se voit, mais que ce n'est pas pour autant prouvé. L'éternelle question : pourquoi le prouver puisque ça se voit ?

- une seconde difficulté, à relier à la première, est due à la présentation du problème. En effet, on met en évidence la droite (AD) à l'aide d'une couleur et l'animation "montre" que cette droite est perpendiculaire à (BC). Mais on ne voit pas pourquoi il pourrait en être autrement.

A ce niveau, pour convaincre les élèves, il faudrait une petite animation supplémentaire, ou alors un dessin au tableau reprenant les constructions, mais avec un triangle ABC non-rectangle. La droite (AD) n'est alors plus perpendiculaire à (BC). (Voir figure ci-après)



Le résultat du théorème étant algébrique, l'énoncé en français sera *le carré de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des deux autres côtés*. Cette formulation est intéressante car ambiguë. 'Carré' est compréhensible au sens de la figure : le carré, ce qui réfère à ce qu'on vient de voir, mais ouvre sur le carré numérique, qui est la principale application du théorème :  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ , dans le cas d'un triangle ABC rectangle en A.

## 5) Conclusion

Les élèves manipulent facilement les aires, ils ont su globaliser et visualiser les formules des aires : ils savent les utiliser sans aucun calcul.

Les aires apparaissent vraiment comme un outil de démonstration pratique, dans tous les sens du terme.

Par ailleurs, en disposant de plus de temps - une séance de deux heures - l'exercice permet, en marge du théorème, de mettre en évidence la nécessité de démontrer : passer par le stade de l'observation, mais dépasser la conjecture et prouver ce que les sens explorent.

## **6) Prolongements: autre démonstration, propriétés de Thalès**

Une autre démonstration pourrait être envisagée : la démonstration d'Euclide. (voir annexe page XIV pour une démonstration détaillée)

Cette démonstration s'appuie sur une figure géométrique qui apparaît plus abstraite sans la vidéo. Mais la figure de base est très semblable. L'élève pourra imaginer ( voir mentalement ) des glissements, même si dans ce cas ce sont des triangles qui glissent. Ceci débouche sur un corollaire du précédent théorème d'Euclide (voir page 14) :

" Si deux triangles ont une base commune et les sommets opposés sur une parallèle à cette base, alors ils ont même aire".

L'exercice a été observé en Seconde lors d'un devoir maison. Le corollaire du théorème d'Euclide (appelé alors "Théorème d'Euclide") ayant été vu et démontré sans problème à l'occasion d'un autre exercice sur les aires : Les quadrilatères de " même aire\* ", qui fait appel en plus aux homothéties.(Voir annexe page XVII)

En annexe, nous proposons aussi les démonstrations de deux théorèmes importants du collège, le théorème de Thalès et un corollaire, puis une réciproque, qui peuvent être présentées en Troisième. ( voir annexe page XV)

Les aires apparaissent encore comme un outil performant de démonstration.

\*: Terracher 2nde

## Chapitre II

---

Une proposition d' Introduction de la notion de l'intégrale:  
"et si on commençait par les aires ?"

Un des moteurs de l'étude des aires et de la mise au point de la théorie de l'intégration a été la résolution de problèmes de quadrature : comment "quarrer" une aire délimitée par une figure courbe ?

Chez les Grecs, il ne s'agit pas d'affecter un nombre à une surface - ce à quoi les formules aboutissent concrètement - mais plutôt de comparer des aires entre elles, de trouver un *rapport* entre elles. Ainsi la quadrature d'une surface consiste à construire un carré de même aire que cette surface. Ceci n'est pas aussi évident : la quadrature du cercle (du disque plutôt) n'est pas possible; on ne le sait que depuis peu.

On étend cette définition étymologique de la quadrature à un triangle. C'est ce que nous allons voir dans le début du chapitre. Plus exactement, une aire "curviligne" formée par un arc de parabole va être comparée à une aire "rectiligne" formée par un triangle.

### I. Une approche possible dès la première

Lors de la première année d'I.U.F.M., nous avons présenté en classe de première un exercice portant sur le thème de "l'outil dérivée". Il avait pour objet de découvrir analytiquement des propriétés de la parabole, afin d'aboutir à une construction géométrique d'un arc de parabole. En prolongement possible et quasi naturel, nous nous sommes intéressés à la méthode d'Archimède concernant la quadrature d'un arc de parabole.

#### **1) Quadrature d'un arc de parabole**

En annexe (page XVIII), nous proposons un énoncé possible pour un devoir en première, seules les deux premières parties ont été soumises à des élèves de première E en première année d'I.U.F.M.

Ces 2 parties requièrent la description analytique des tangentes à la courbe représentative d'une fonction, le lien entre le nombre dérivée et la pente d'une tangente étant fait. Cela permet de mobiliser des connaissances de seconde : l'outil analytique.

La partie III n'a pas pu être soumise aux élèves en l'absence d'un outil important et nécessaire : les suites géométriques.

Par ailleurs, cette partie sera plutôt l'objet d'une séance de travaux dirigés dans le cadre de l'étude des suites en première, des suites géométriques plus particulièrement.

Les élèves redécouvriront des situations de comparaison d'aires auxquelles ils ne sont plus habitués : que dire de triangles ayant une caractéristique en commun, une hauteur ou une base ?

Lors du T.D., les questions 1, 2, 3 et 4 ( voir encadré ci-dessous) devront sûrement être guidées, même si tout n'est pas écrit à condition de laisser reprendre le 5 ou la rédaction complète de 1, 2, 3, 4 à la maison.

1. Montrer que l'aire du triangle AMB est égale à la moitié de l'aire de AJB.  
En déduire que l'aire de AEM est la moitié de l'aire de ACM.
2. Quelle est la nature du quadrilatère CMIR ?
3. Prouver que l'aire de ACM est la moitié de l'aire de AIM. On pourra montrer que l'aire de ICM est la moitié de l'aire de AIM.
4. En déduire que l'aire de AEM est le quart de l'aire de AIM.
5. Montrer de manière analogue que l'aire de BMF est le quart de l'aire de BIM.

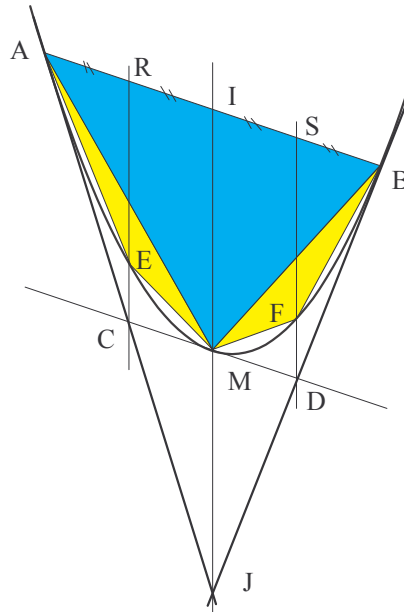
Au I, on démontre de le milieu I d'un segment formé par deux points A et B de la parabole à même abscisse que le point d'intersection J des tangentes à la parabole aux extrémités A et B du segment. Puis il vient que le milieu M du segment [IJ] ainsi construit est un point de la parabole, dont la tangente à la parabole est parallèle au segment [AB].

Les mises en équations restent simples mais les élèves n'ont plus le savoir-faire du travail sur les équations de droites. ( voir annexe page XIX)

Comme l'indique la figure ci-dessous, on montre que, étant donné un segment (arc) de parabole et les tangentes en ses extrémités A et B, le milieu du segment formé du milieu I du segment de droite, associé au segment de parabole, et de l'intersection J des deux tangentes est un point de la parabole, dont la tangente est parallèle au segment associé [AB]. Cette dernière tangente coupe les 2 premières tangentes en 2 points C et D. En considérant les 2 couples de tangentes ( (AC),(CM) ) et ( (MD),(DB) ) ainsi formés, on réitère la construction pour construire les points E et F de la parabole.

On aboutit ainsi à une construction point par point d'un segment de parabole.

## 2) Le problème



Dans la partie III, on met l'accent sur les triangles construits sur les segments de paraboles: ABN, AME, BMF ...

En effet, l'aire du triangle AMB est égale à la moitié de l'aire de AJB. M est milieu de [IJ], donc les triangles AMI et AMJ ont même base et même hauteur et par suite même aire. De même BMI et BMJ ont la même aire. D'où le résultat annoncé par recollement des morceaux AMI, AMJ, BMI et BMJ : l'aire du triangle AMB est égale à la moitié de l'aire de AJB.

On retrouve exactement la même configuration pour les triangles AEM et ACM. Donc AEM a une aire moitié de l'aire de ACM.

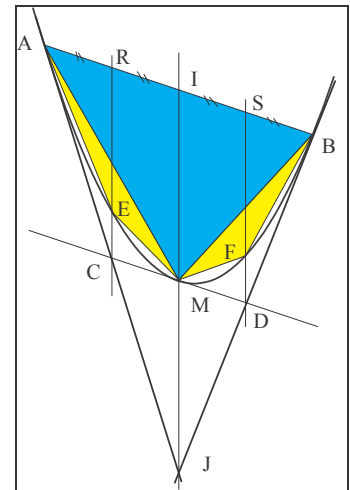
Dès lors, comme (MC) est médiane du triangle AMJ, les triangles ACM et CMJ ont même aire et donc le triangle ACM a une aire moitié de l'aire de AMJ. Comme on a vu que l'aire de AMJ est égale à l'aire de AIM, il sort que l'aire du triangle ACM est la moitié de l'aire du triangle AIM.

Ainsi, comme AEM a une aire moitié de celle de ACM, l'aire de AEM vaut le quart de l'aire de AIM.

D'une manière analogue à ce qui vient d'être fait, on montre que l'aire de BFM est le quart de l'aire de BIM.

Par recollement des triangles, AMB, AEM et BFM, l'aire du polygone AEMFBA vaut bien  $\left(1 + \frac{1}{4}\right)a(\text{AMB})$ .

On réitère le procédé, on construit des triangles dont les aires sont égales au quart de l'aire formé par les triangles précédents. D'où une procédure récurrente qui aboutit à un polygone inscrit dans le segment de parabole et dont l'aire vaut  $\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}\right)a(\text{AMB})$ .



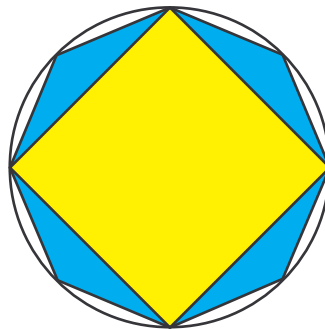
On reconnaît alors la somme des  $n+1$  premiers termes d'une progression géométrique de raison un quart. D'où  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1}$ .

Un passage à la limite permet de conclure que l'aire des polygones est  $\frac{4}{3}$  de l'aire du triangles AMB. On a ainsi calculer l'aire du segment de parabole.

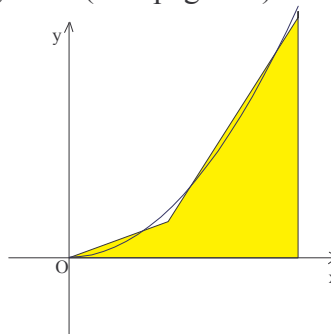
Dans le devoir, l'objet de la questions 9, de la question 10 qui va de pair, mais déjà de la question 7, est de mettre en relief ces polygones du type AMB, AEMFB, ..., pour voir si les élèves réalisent bien que l'on construit des polygones dont l'aire est une approximation de l'aire étudiée.

### 3) Le découpage

Cette méthode de découpage tient essentiellement compte de la forme même de la courbe. On construit une ligne polygonale qui va épouser la courbe parabolique après un certain nombre d'itérations du procédé. Comme on peut le voir avec le disque, une des premières aires non curvilignes étudiée pour son aire et débouchant sur une formule, la tentation est grande d'inscrire des polygones : un carré fait plus de la moitié du disque, les triangles accolés aux côtés plus de la moitié du reste...



Une autre tentative d'approximation d'une ligne courbe a été observée en Terminale : approcher la parabole par des segments de droites, qui semblent être un compromis, une sorte de moyenne entre une corde et une tangente. Conscients de l'approximation et de ses défauts, les élèves essaient de trouver un "équilibre" entre l'approximation par excès -la corde- et l'approximation par défaut -la tangente- (voir page 23) :



### Une série

On va étudier la suite des aires des polygones ainsi construits. En fait, comme le montre très bien l'exemple de la parabole ou celui du cercle, on crée une série, que l'on peut qualifier de "triangulaire". Un premier triangle est complété par des triangles, de même nature, qui

améliorent l'approximation de l'aire cherchée. Arrive finalement la série des aires de ces triangles, la contribution de chaque triangle étant conservée à l'étape suivante.

Ici, se mettent en place les termes d'une suite géométrique dont la somme *partielle* des  $n$  premiers termes est connue. On n'a pas besoin d'une théorie des séries, heureusement.

Mais cette activité apparaît donc comme une initiation aux séries. Le caractère cumulatif de la somme ressort bien dans la construction. Mais on se ramène quand même aux résultats sur les suites pour l'étude de ces sommes partielles.

### 3) Conclusion

L'exercice permet de visualiser une procédure de découpage faisant appel aux suites, et même à une série. Il offre une représentation géométrique relativement simple. La notion d'aire permet ici d'envisager sous un angle différent ces notions d'analyse.

Inversement, ces notions éclairent et élargissent la perception qu'ont les élèves de la notion d'aire, souvent limitée au cas des quadrilatères ou du cercle. L'aire curviligne est définie comme limite, limite très visuelle, d'une suite d'aires rectilignes. On peut trouver une valeur exacte de cette aire et non plus se contenter d'approximations.

Une question peut néanmoins subsister : on a postulé, sans le dire réellement, que l'aire que l'on cherche à calculer existe et que donc la limite qui est étudiée existe a priori. Mais ce postulat est-il vrai ? Cette question peut paraître saugrenue pour les élèves. Elle dépend de l'acquis même des différentes notions mises en jeu ici. En tout cas, il serait intéressant de connaître leurs réactions.

Une dernière remarque par rapport à la vraie méthode d'Archimède : il fallait une double réduction par l'absurde pour se convaincre que l'aire trouvée était bien l'aire de l'arc de parabole (voir annexe page XXXI). La notion d'infini et les problèmes faisant appel à une notion de limite n'étaient pas maîtrisés chez les Grecs. Les différents paradoxes imposaient d'évacuer toute allusion à cette notion.

Pour les élèves, l'existence de la limite prouvera-t-elle l'existence même de l'aire ou l'existence de l'aire assoira-t-elle l'existence même d'une limite ?

### 4) Vers l'intégrale

Un pavage (ou découpage) mène-t-il toujours à un calcul exact de l'aire, comme le présage l'exemple précédent ? La réponse est non. L'intégrale va permettre ce calcul.

## II. Une introduction de l'intégrale

Cette activité ( le sujet est présenté dans l'annexe page VII ) a été proposée dans une classe de terminale D. Nous avons cherché à montrer comment à partir d'une recherche d'aire, nous pouvions être amené à construire une nouvelle notion: l'intégrale.

Pour ce faire, notre activité s'est déroulée en trois temps. Nous avons cherché l'aire de trois domaines. Les fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  données dans l'activité étant caractérisées par :  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = 1$  et  $f_3(x) = x^2$  pour  $x$  réel.

Notre objectif est de permettre aux élèves de prendre conscience que la notion d'intégrale qu'ils découvrent fait appel à des connaissances antérieures relativement élémentaires (les aires, la dérivation et la primitivation) et qu'ils peuvent l'appréhender par eux même à cette époque.

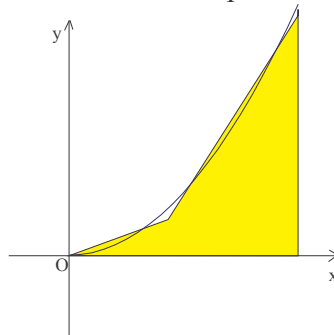
### **1) Activité préparatoire à la notion d'intégrale présentée en T D**

Pendant les deux heures, l'approche de la notion d'intégrale a posé plusieurs problèmes.

Le premier repose sur l'oubli de ce qu'est une aire. En effet, dans la première étape (voir énoncé), les deux premiers calculs se font sans problèmes, on applique les formules usuelles. Par contre pour le calcul avec la "fonction carré"  $f_3$ , cela devient impossible.

Plusieurs réactions:

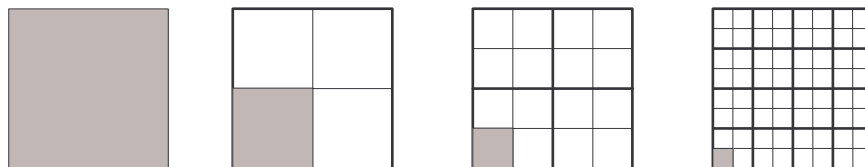
- " On ne fait rien. "
- " Certains élèves approche la courbe représentative de la fonction par des tangentes, d'autres par des cordes dans l'idée de trouver des aires de triangles ou de trapèzes. Le choix peut se faire de manière systématique. "
- " Quelques élèves approchent la courbe représentative de la fonction par des droites - compromis entre tangentes et cordes (voir page 21). On se ramène alors au calcul de l'aire d'un polygone. Le problème est de trouver un choix systématique de ces droites. Sur quel critère se fonder pour dire que la droite approche au mieux le problème"



- " On essaie d'encadrer l'aire demandée par des aires *connues*. "

Après avoir rappelé la définition première de l'aire, les élèves décident d'opter pour une méthode très proche de celle employée à l'école élémentaire. Ils comptent le nombre de carrés compris dans le domaine recherché.

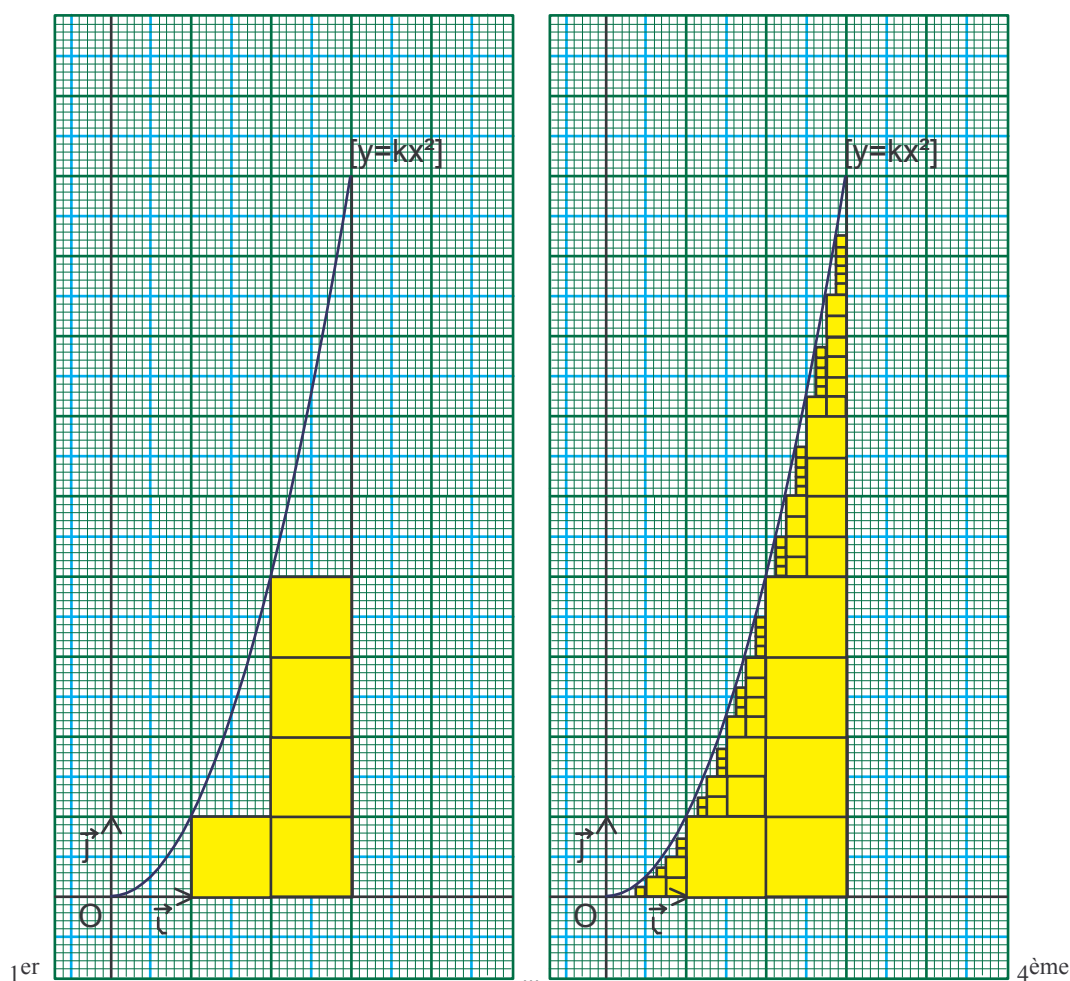
Pour avoir une meilleure précision, ils affinent ensuite leur découpage, en prenant comme carré de référence, quatre fois, puis seize fois plus petit...



En prenant pour aire de base, celle d'un carré ayant un côté de longueur 1, puis 0,5 ... , ils ont trouvé alors les approximations suivantes de l'aire demandée, qui vaut  $9 \text{ cm}^2$  :

| découpage        |                         | Aire $A_3$ | surface "unité"            | en $\text{cm}^2$ |
|------------------|-------------------------|------------|----------------------------|------------------|
| 1 <sup>er</sup>  | (précision élémentaire) | 5          | carré $1 \times 1$         | 5                |
| 2 <sup>ème</sup> | ( 4 fois plus précis )  | 26         | carré $0,5 \times 0,5$     | 6,5              |
| 3 <sup>ème</sup> | ( 16 fois plus précis ) | 125        | carré $0,25 \times 0,25$   | 7,8125           |
| 4 <sup>ème</sup> | ( 64 fois plus précis ) | 536        | carré $0,125 \times 0,125$ | 8,375            |

Ce tableau est à relier avec les découpages suivants :



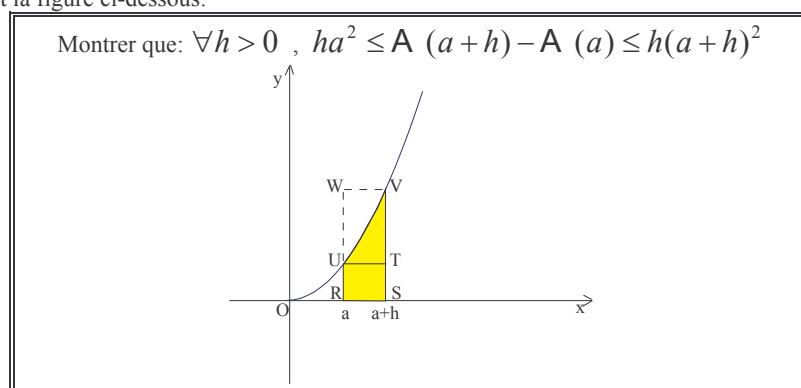
A la fin de la séance, les élèves ont comparé leur résultat à celui donné par le calcul intégral, constatant que l'erreur n'est pas si importante que cela mais qu'il y a erreur. On trouve  $8,375 (\text{cm}^2)$  par approximation et  $9(\text{cm}^2)$  par calcul.

Le bilan de cette première étape est simple, on constate que pour connaître la valeur de l'aire demandée, les méthodes habituelles pour les figures rectilignes sont vite lourdes. Un deuxième problème se pose : même si la précision augmente à chaque découpage, on ne peut obtenir qu'une approximation et non la valeur exacte.

La suite de la séance a donc pour objectif de trouver une méthode qui puisse donner la valeur exacte de l'aire demandée. On introduit ainsi, à travers un exemple, la notion d'intégrale.

Dans la deuxième étape, la principale difficulté réside dans le fait que pour les élèves, il a été mal aisé de démontrer la première inégalité et ceci malgré l'indication graphique ( voir figure ci-après ).

1) En utilisant la figure ci-dessous:



En effet, ils n'ont absolument pas vu le lien entre l'égalité demandée et la figure.

Voici quelques observations:

- " *Quelques élèves sont partis de la formule. En partant de  $A(a+h) - A(a)$ , ils voulaient aboutir à une inégalité.* "
- " *D'autres ont cherché à utiliser des théorèmes d'analyse pour essayer d'aboutir à des inégalités et trouver celle demandée.* "

Après quinze minutes, il a fallu reprendre en analysant la formule. En effet, peu d'élèves avaient remarqué que  $A(a+h) - A(a)$  est une aire et donc que l'encadrement recherché ne peut être qu'un encadrement faisant intervenir des éléments de même nature : des aires. (on ne peut comparer que ce qui est comparable)

C'est la caractérisation de  $A(x)$  qui posait problème. Cette mise au point a permis à quelques élèves de se lancer enfin. Ils ont remarqué que, si l'inégalité recherchée est une inégalité sur des aires, il faut voir si l'on ne peut encadrer géométriquement le domaine correspondant à  $A(a+h) - A(a)$  par deux autres domaines. La figure permet alors d'obtenir directement le résultat.

Il est surprenant de voir la difficulté rencontrée par les élèves pour élaborer cette formule, ce qui contraste avec les calculs analytiques réalisés avec nettement moins d'hésitation.

Par cette activité nous avons pu introduire la notion d'intégrale entre  $a$  à  $b$  de la fonction continue  $f$  sur un intervalle  $I$ , comme étant égale à  $F(b)-F(a)$  où  $F$  est une primitive de  $f$  et montrer ainsi le lien entre intégrale et la notion d'aire.

Au cours de la deuxième étape, nous nous sommes ramenés à la limite d'un taux d'accroissement en appliquant le théorème des gendarmes ( ou théorème de pincement ) à l'inégalité :

$$\text{" Si } h \neq 0 \text{ et } (a+h) > 0 \text{ on a: } a^2 \leq \frac{A(a+h) - A(a)}{h} \leq (a+h)^2 \text{ "}$$

On a pu rappeler l'importance de la continuité de la "fonction carré" ( qui a été vue lors de l'étude des fonctions polynomiales ).

Les élèves ont pu ainsi découvrir l'intégrale comme nouvel outil performant pour calculer des aires curvilignes. En fin de séance, ils ont calculé  $\int_0^3 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9$  et ont ainsi confronté cette solution avec leur résultat du début de séance.

## 2) Une approximation possible: découpage laminaire, somme infinie

La recherche de l'aire du domaine  $\{a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq f(x)\}$  peut se faire aussi par subdivision de l'intervalle  $[a,b]$  en  $n$  "parties-segments" de longueur  $(b-a)/n$ . On construit ainsi des rectangles dont la hauteur est limitée par la courbe représentative de la fonction. On peut ainsi faire sentir pourquoi le signe  $\int$  est issu du  $S$  de somme.

Cette méthode de découpage de l'aire sous une courbe en tranches rectangulaires permet de faire sentir l'aire comme un "empilement de segments", ce qui apparaît quand  $n$  devient grand.

Ce découpage et son interprétation s'avèrent pratiques et performants lors de l'extension du calcul intégral au calcul de volume : on découpe en tranches d'épaisseurs fines, que l'on assimile à des surfaces. Cela permet de retrouver rapidement la plupart des formules de volume dont les élèves ont généralement oublié l'origine.

Néanmoins, même si cette image mentale d'une aire est pratique, il ne faut pas faire d'amalgame. Pour obtenir une aire, on ne somme pas l'aire de tels segments : l'aire d'un segment est nulle et une aire serait alors nulle comme somme de quantités nulles.

Dans le programme de Terminale, les méthodes des rectangles et des trapèzes sont présentées après l'étude des intégrales, en fin de chapitre - après le cours proprement dit. C'est à notre avis un tort car on prive les élèves d'une représentation qui leur est facilement accessible (voir article de M. Stoll, annexe page XXIII). L'intégrale est un moyen de mesurer une aire, d'apprécier l'étendue d'une surface plane.

Il est à remarquer que la méthode des rectangles se rapproche et est à notre avis une mise en place de l'intégrale de Riemann pour des phénomènes uniquement continus. Hormis le fait qu'on travaille ici avec une classe restreinte de fonctions, une des différences est que, dans le processus Riemannien, on envisage une subdivision quelconque d'un intervalle et que généralement dans le secondaire, on se limite à une subdivision régulière, qui a l'avantage de simplifier la plupart des calculs envisagés.

## Chapitre III

### "Aires et l'intégrale: L'art de se doter d'outils performants"

L'objet de ce chapitre est de montrer qu'une fois l'intégrale en sa possession les références aux aires sont toujours possibles, et que le calcul intégral ouvre de nouvelles perspectives.

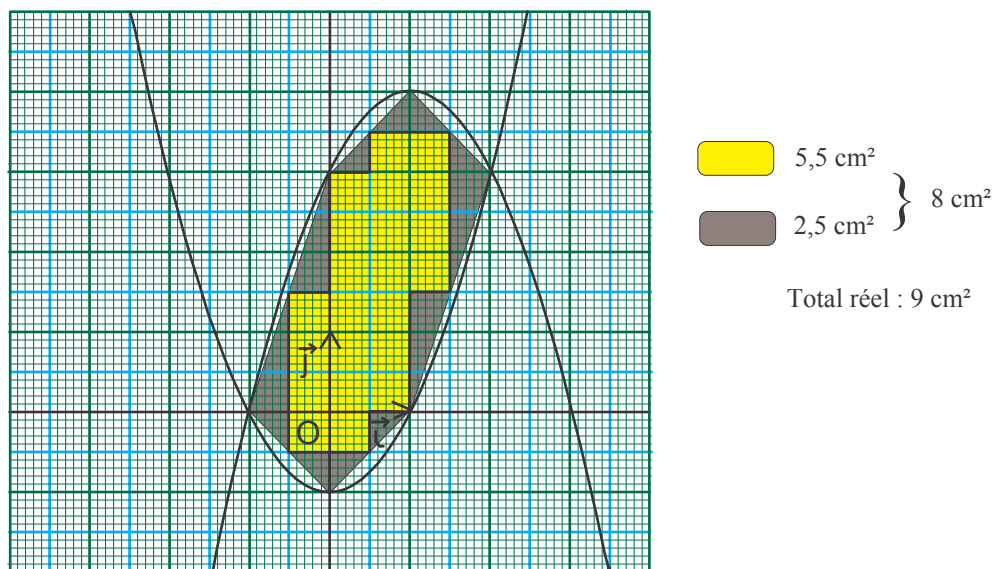
C'est un outil pratique pour le calcul de grandeurs qui relèvent aussi bien de la géométrie que des sciences physiques.

Par ailleurs, il permet de réinvestir des notions d'analyse. L'intégrale apparaît alors comme un outil performant de l'analyse.

#### I. Une aire entre deux courbes

Tracer les paraboles  $\mathcal{P}_1: [y=x^2-1]$  et  $\mathcal{P}_2: [y=-x^2+2x+3]$  dans un repère orthonormal en prenant 1 cm comme unité.

Calculer l'aire du domaine limité par les deux courbes.



Un tracé correct avec quelques éléments caractéristiques des courbes représentatives permet d'évaluer graphiquement, grâce au quadrillage, l'aire à calculer.

Cet exercice a été observé en Terminale C comme exercice d'application dans la quatrième partie du cours sur l'intégration "Application des intégrales aux calculs d'aires". Dans cette partie, on étudie l'aire de domaines définis par différentes fonctions en se ramenant le plus souvent à l'intégrale d'une fonction positive.

Pour certains élèves qui n'ont pas pu, ou n'ont pas eu le temps de bien comprendre le cours, c'est l'occasion de retrouver sur un exemple, le théorème qui dit:

"l'aire du domaine définie par  $f$  et  $g$  continues sur  $[a,b]$  avec pour tout  $x$  de  $[a,b]$ ,  $f(x) \geq g(x)$ , est donnée par  $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$ ". On a bien l'intégrale d'une fonction positive qui définit une aire.

Pour cela, ils refont en fait l'opération qui a été faite en classe pour obtenir le théorème. Quelques élèves étaient presque surpris de réussir à le faire. En effet, cela nécessite simplement un sens pratique, un savoir-faire : interpréter l'intégrale comme une aire et recoller les morceaux. Ici, l'aire du domaine considéré est la différence de l'aire définie par  $f$  et de l'aire définie par  $g$  sur  $[-1,2]$ .

Si on sait interpréter correctement l'intégrale en tant qu'aire, on n'a en fait pas besoin de connaître par cœur ce style de théorème. On le retrouve quand on en a besoin.

## **II. Une application à l'électricité**

A l'occasion de la présentation des inégalités de la moyenne et de la moyenne d'une fonction sur un intervalle, nous avons observé en Terminale C l'exercice suivant:

### **Lien entre intensité maximale et intensité efficace d'un courant alternatif**

On appelle Intensité efficace, notée  $I_{\text{eff}}$ , l'intensité du courant qui produit le même travail calorifique ( effet Joule ) à travers une résistance  $R$  durant une période  $T$ . Trouver une relation simple entre l'intensité maximale  $I_m$  et l'intensité efficace  $I_{\text{eff}}$ . On prendra  $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ .

La question qui n'a pas été posée en classe - et qui est loin d'être évidente actuellement en Terminale C - est de savoir comment interpréter le travail comme intégrale de l'énergie dissipée pendant une période  $T$ . La formule est connue pour un courant continu :  $W = RI^2T$ . C'est l'aire du rectangle de longueur  $T$  et de hauteur  $RI^2$ .

Il faut ensuite étendre cette définition à un courant variable. Cela nécessite d'interpréter le travail sur une période comme la somme des travaux élémentaires sur une période. Cette sommation débouche alors sur l'intégrale de la fonction donnant l'énergie ( qui est fonction du temps ). Cela procède d'une ouverture sur le raisonnement "physicien". (Voir le lien entre sciences physiques et mathématiques page 30.)

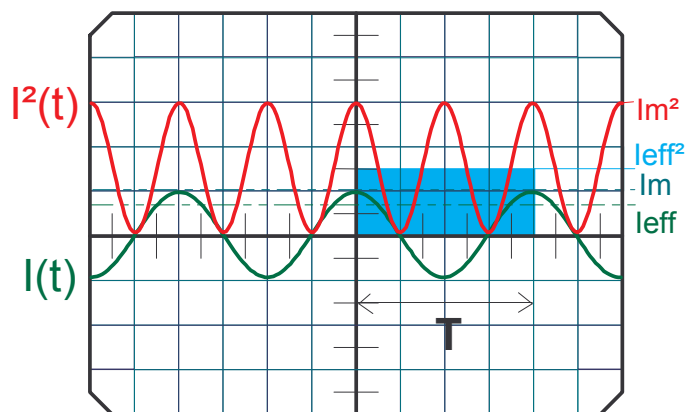
L'identification du travail calorifique en continu et du travail en alternatif permet d'établir que le carré de l'intensité efficace est la valeur moyenne du carré de l'intensité en alternatif sur une période.

Une linéarisation du "cosinus au carré" et une primitivation amène la relation :

$$I_m^2 = 2 I_{\text{eff}}^2, \text{ d'où } I_m = \sqrt{2} I_{\text{eff}}.$$

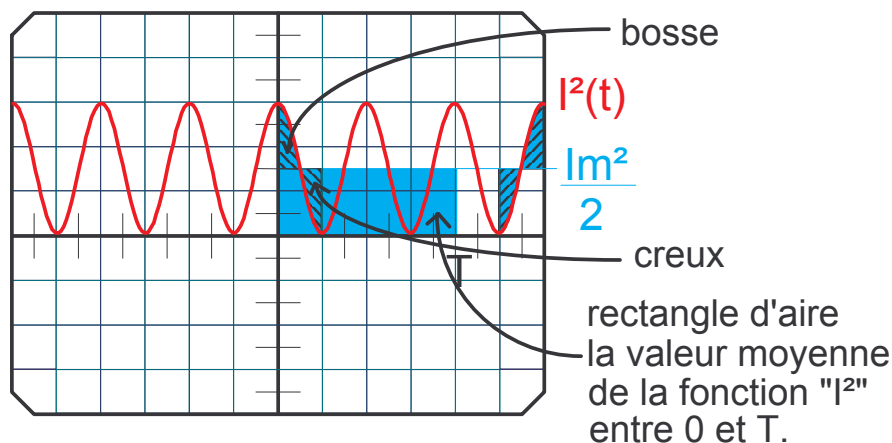
(Pour plus de détails sur les calculs, se référer à l'annexe page XXVIII)

Tout ceci se fait par calcul uniquement, sans étude graphique. Cependant le fait que la moyenne du carré de l'intensité soit égale à la moitié de son maximum est remarquable.



La valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle est la hauteur du rectangle construit sur le même intervalle et qui a même aire que le domaine associé à la fonction (ici cette hauteur est  $I_m^2/2$ ).

Ainsi le découpage, désigné par les flèches sur le dessin ci-après, nous a amené à considérer la proposition suivante pour la fonction "cosinus au carré" : "l'aire d'un creux est la même que celle d'une bosse".



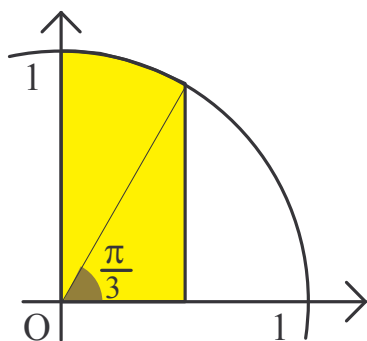
Cela ne semble pas aussi évident. La fonction cosinus possède bien une propriété similaire: le point  $(\frac{\pi}{2}, 0)$  est centre de symétrie pour la courbe représentative.

Mais la fonction considérée est le carré de la fonction cosinus. Pourquoi la propriété serait-elle transmise par élévation au carré ?

Le vérifier n'est pas trivial. (voir annexe page XXVIII)

Le calcul analytique d'une intégrale a donc une conséquence remarquable quant à la fonction "cosinus au carré"; une interprétation géométrique certes particulière, mais qu'il est dommage de passer sous silence.

### III. Un calcul de grandeur géométrique



Calculer l'aire du domaine ombré ci-contre.

En déduire la valeur de  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

Un constat : les élèves ne lisent pas l'énoncé. Tous se plongent dans le calcul d'une intégrale dans le style de celle qu'ils abordent quand on établit la formule intégrale du volume de la demi-sphère c'est à dire:  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ . Mais stupeur, ni la primitivation, ni l'intégration par parties ne fonctionnent ! Aucun élèves n'a vu que l'intégrale à calculer figure dans l'énoncé précédée d'un "en déduire" et qu'il faut donc essayer d'autres techniques, plus géométriques.

Une fois la remarque faite, un "ouf !" de soulagement fait place à une atmosphère agitée. On va calculer l'aire par recollement de l'aire d'un triangle et d'un secteur angulaire. Une petite moitié des élèves reste quand même troublée de ne pas pouvoir faire le calcul.

Par ailleurs, quelle est l'aire d'un secteur angulaire ? Le salut semble être la calculatrice/formulaire et non pas les acquis du cours de seconde. L'aire d'un secteur circulaire et sa formulation demeurent bien mystérieuses.

De plus, aucun élève ne tente de trouver par lui-même un raisonnement menant à l'aire du secteur : il est en effet possible de découper le disque grâce au secteur d'angle  $\frac{\pi}{6}$ . C'est une démarche simple qui ne nécessite aucun outil lourd !

### Les sciences physiques au secours des mathématiques ou le contraire ?

Peut-être faudrait-il montrer à la manière du physicien, ce qui n'a rien de péjoratif, comment retrouver l'aire d'un secteur angulaire. C'est un peu éloigné de l'esprit de l'intégration en Terminale, mais ça ne fait appel qu'à une paramétrisation angulaire du cercle, ce qui est accessible à un élève de Terminale C.

Cela permet de prendre du recul par rapport au cours de Terminale et d'apercevoir un mode de raisonnement classique chez les physiciens mais souvent difficile pour les étudiants du supérieur. De plus, le terme différentiel "d." peut de nouveau prendre une dimension de variation du style " $\Delta$ . petit".

Un tel exercice peut réconcilier mathématiques et sciences physiques auprès des élèves qui considèrent que le physicien fait des approximations lourdes : "des raccourcis pratiques qui semblent a priori peu rigoureux !"

**IV. L'intégration, outil performant de l'analyse**

Interpréter une intégrale comme une aire est très pratique. Cependant, dans beaucoup d'exercices d'analyse, cette interprétation ne sert plus - comme le montre l'exercice suivant.

Cet exercice présenté en Terminale C est l'occasion de montrer que  $\frac{22}{7}$  est une approximation par excès de  $\pi$ : on trouve la formule de l'erreur et on en tire une majoration de l'erreur.

" $\pi \odot \frac{22}{7}$ " Archimède

A/ Un résultat

Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ .

1° Justifier la dérivabilité de  $F$  et calculer  $F'$ .

2° Soit  $u$  la fonction définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par  $u(x) = F(\tan x)$ .

a) Montrer que  $u'(x) = 1$  pour tout  $x$  de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

b) En déduire l'expression de  $u(x)$  si  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et montrer que  $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$ .

B/ Le problème

1° Montrer que  $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

2° Etablir à l'aide du A/ que  $\frac{22}{7} - \pi = \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx$ .

3° En déduire que  $\frac{22}{7}$  est une approximation de  $\pi$  à  $4 \cdot 10^{-3}$  près.

Est-ce par excès ou par défaut ?

**Analyse**

Les élèves de Terminale C ne disposent pas de la fonction arctangente, fonction réciproque de la fonction circulaire tangente sur  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ , et donc encore moins de sa dérivée.

Dans la partie A, on a donc le calcul intégral exact de  $\pi$  en remarquant que  $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ .

La question 2 fait appel au théorème issu directement du théorème fondamental " $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ , où  $F$  est une primitive de  $f$  continue sur  $[a, b]$ " :

" $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$  pour  $f$  dérivable de dérivée continue ( $f$  de classe  $C^1$ )"

Du point de vue des aires, il faut remarquer ici que ces deux définitions équivalentes de l'intégrale d'une fonction n'ont pas la même portée.

La première fait bien référence à l'aire d'un domaine associé à la fonction.

La deuxième est plus fonctionnelle : on connaît facilement des primitives d'une fonction dérivée. Mais il n'y a pas d'interprétation vis à vis de l'aire de la fonction.

La portée de ce théorème en analyse apparaît d'ailleurs dans cette question 2.

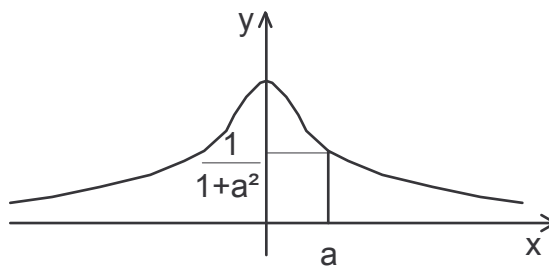
En effet, la dérivée de la fonction composée  $u$  est constante égale à 1. On trouve donc  $u$  en remarquant qu'elle s'annule en 0 car  $\int_a^u f(x)dx = 0$ . Ici l'interprétation d'une intégrale en tant qu'aire n'apporte absolument rien. Il faut donc s'en passer.

### Une erreur d'élève remarquable

Une élève, consciente du fait que pour déterminer la fonction ( ou plutôt la constante de primitivation ), il faut une valeur de la fonction, s'est intéressée à  $\int_a^u \frac{1}{1+x^2} dx$ . Cependant alors que cette quantité est nulle, elle écrit

$$= \frac{1}{1+a^2}.$$

Cette erreur est sans doute due à l'interprétation graphique de l'intégrale comme aire entre  $a$  et  $b$  car ici  $b$  est confondu avec  $a$ . On a donc besoin de l'aire du domaine associé à la fonction au point  $a$ .



Il est intéressant de voir que, pour cette élève, la valeur d'une fonction en  $x$  n'est plus seulement représentée par le point de coordonnées  $(x, f(x))$  mais par un segment de longueur  $f(x)$ . Or l'aire d'un segment est nulle et n'est pas égale à sa longueur, longueur qui correspond à la valeur de la fonction.

De plus, le fait que la borne supérieure de l'intégrale varie est une difficulté supplémentaire dont les élèves n'ont pas l'habitude.

D'une manière générale, les élèves mettent un certain temps pour faire cette première partie, mais parviennent au résultat. Dans cette classe, il a été possible de parler à titre de culture et de curiosité de la réciproque de la fonction tangente, ce qui est algébriquement clair pour certains élèves mais reste obscur pour les autres. Ceci est d'autant plus étonnant qu'en géométrie, ils manipulent les isométries vectorielles, leurs réciproques et l'identité vectorielle sans difficulté apparente.

Dans la partie B, qui s'appuie sur le résultat de la partie A, tous ont su dire que l'on a nécessairement une approximation par excès puisque la fonction intégrée est positive. Une majoration simple de la fonction intégrée fournit la majoration souhaitée de l'erreur.

### **Conclusion et prolongement**

Un autre exercice montrant la performance de l'intégration en analyse a pu être observé à l'occasion de l'étude des suites. Il prouve l'irrationalité de  $e$  par l'étude de la suite d'intégrales de terme général

pour  $n$  positif. (voir annexe page XXX). Ce genre d'exercice réussi à relancer l'intérêt des élèves quant à l'étude une fois de plus d'une intégrale avec en plus des suites. Le travail est fait de bon gré et la réussite est là.

Par ailleurs, il fait appel à une grande partie des connaissances sur les intégrales et les suites. Il présente même un peu la théorie des nombres : une suite de rationnels tend vers une limite réelle non nécessairement rationnelle !

Ainsi l'intégral apparaît comme un outil performant en analyse. La référence aux aires n'est pas toujours utile dans les démonstrations mais permet une meilleure visualisation de théorèmes souvent abstraits dans leur formulation.

## Conclusion

---

L'élaboration de ce mémoire professionnel a été pour nous extrêmement enrichissante. Le sujet nous a en effet ouvert de nombreux horizons et permis de penser l'enseignement d'une notion dans sa durée. Nous avons en effet voulu montrer que le concept d'intégrale était amené très tôt, et que sa caractérisation en classe de terminale pouvait être un enchaînement logique dans la formation de l'élève. Cette approche mérite que l'on s'y attarde, même si elle demande de la part de l'enseignant de changer de regard par rapport à ses démarches pédagogiques.

Le mémoire a également été l'occasion de confronter nos connaissances universitaires avec notre métier; ainsi nos objectifs du début d'année se sont vus modifiés au contact des élèves et des programmes. Cet aller-retour, université-terrain ( collège - lycée ), a été passionnant. Nous avons pu ainsi remarquer que l'un et l'autre étaient très complémentaires. Les ouvrages consultés, les recherches au sein de l'université ont ainsi permis d'approfondir nos investigations et de prendre du recul par rapport à nos objectifs. Parallèlement, les observations effectuées en classe, nous ont incité à nous documenter et à avoir un esprit plus critique.

Enfin cela a été l'occasion de continuer un travail d'équipe commencé en première année d'I.U.F.M. La mise au point des objectifs, la mise en oeuvre et l'analyse des problèmes, la phase de rédaction nous ont montré que ce type de recherche ne peut s'effectuer seul. Bien que difficile, il nous semble que cette démarche est à poursuivre au sein des établissements scolaires.

## Bibliographie

---

BARUK S.

*Dictionnaire des mathématiques élémentaires.* Seuil Sciences Ouvertes.

Bulletins Officiels de l'Education Nationale.

COLIN-GLASER

*Mathématiques au CM.* Nathan.

Commission inter-irem. Epistémologie et histoire des mathématiques.

*Histoire de problèmes. Histoire des mathématiques.* IREM de Lyon.

DAHAN-DALMEDICO A. / PEIFFER J.

*Une histoire des mathématiques. Routes et dédales.* Points Sciences.

DETHEIL R. et CAIRE D.

*Géométrie (Transformations-Coniques) Classe de mathématiques. 1er Livre.*

J-B Baillièrre et fils, éditeurs.

DOBIGEON J-C. AUVIN B.

*Aires. Second Cycle.* IREM Poitiers. Juin 1991.

DOFAL M.

*Enseigner les mathématiques.* CRDP Orléans-Tours.

EILLER R.

*Maths et calculs CM1.* Classiques Hachette.

*Maths et calculs CM2.* Classiques Hachette.

KANIEWSKI J.

*Utilisation des aires pour la résolution de quelques problèmes de géométrie.*

Groupe de géométrie III. IREM de Lille 1984.

LANG S.

*Serge Lang, Des jeunes et des maths.* Belin.

MAYARD-MILLET.

Chapitre XXI. Les Aires.

SCHNEIDER-GILLOT Maggy.

*Des objets mentaux "Aires" et "Volumes" au calcul des primitives.*

Louvain-La-Neuve. 1988.

STOLL A.

*Comment l'histoire des mathématiques peut nous dévoiler une approche possible du calcul intégrale.* IREM Strasbourg. Repères n°11, Avril 1993.

TERRACHER

*Mathématiques Seconde.* Hachette Lycée.

*Géométrie 1ère S et E.* Hachette Lycée.

*Algèbre et Géométrie Terminale C et E.* Hachette Lycée.

TISSOT B.

*Comprendre la Géométrie - 5°- Travaux dirigés.* Hatier.

TRANSMATH.

*Mathématiques 4°.* Nathan.

## Remerciements

---

Nous tenons à remercier plus particulièrement

- notre directeur de mémoire Monsieur M. Picot pour son enthousiasme et son savoir-faire,
- Madame F. Chamontin et Madame A. Mesquita pour leur soutien et leur compétence sur le thème en première année,
- et Mademoiselle C. Delaby pour sa participation à la préparation des thèmes, notamment "aires et volumes" et "dérivation", en vue de l'E.O.P.1 du CAPES.

Ce mémoire a été entièrement conçu et réalisé sur compatibles PC grâce au logiciel Word 2 pour Windows de Microsoft. Le document papier a été produit sur une imprimante personnelle à bulles d'encre.

## ANNEXES

## Plan des annexes

|                                                                            |        |
|----------------------------------------------------------------------------|--------|
| Aires et Intégrales : extraits des programmes .....                        | I      |
| Evaluation à l'entrée en Sixième.....                                      | IV     |
| La ronde des quadrilatères usuels .....                                    | V      |
| Devoir maison sur les aires donné en 4ème .....                            | VI     |
| Activité effectuée en 4ème autour des Glissements Progressifs.....         | VIII   |
| Glissements Progressifs : 1. Perpendicularité .....                        | XI     |
| Glissements Progressifs : 2. Et si le triangle n'est pas rectangle ? ..... | XII    |
| Le Théorème de Pythagore : "Démonstration d'Euclide" .....                 | XIII   |
| Propriétés de Thalès. ....                                                 | XIV    |
| Les quadrilatères de "mêmaire" .....                                       | XVI    |
| La quadrature de la parabole en Première .....                             | XVII   |
| La quadrature du segment de parabole par Archimède.....                    | XIX    |
| Une approche possible du calcul intégral .....                             | XXI    |
| Activité préparatoire à la notion d'intégrale en Terminale D .....         | XXIII  |
| Application de l'intégrale à l'électricité : les calculs.....              | XXVI   |
| L'aire des creux et des bosses.....                                        | XXVI   |
| Irrationalité de e .....                                                   | XXVIII |
| Oral : Enchaînement sur le théorème de Pythagore .....                     | XXIX   |

## Extrait des programmes du collège et du lycée

---

(...) : omission volontaire    [...] : commentaire ou résumé

Nous présentons ici les extraits des B.O. qui font directement référence aux aires et aux intégrales. Cela permet d'observer l'esprit des programmes quant à l'appréhension de ces notions. L'écriture italique (ou en gras) met en évidence certains mots ou expressions qui nous semblent clés dans la progression des différentes classes.

### Programme de Sixième:

#### Travaux géométriques :

Reproduction de figures planes simples. *Comparaison d'aires planes.*

Mise en évidence de la *conservation des aires par une réflexion.*

#### Gestion des données :

*Calcul de l'aire d'un rectangle.* [ ou d'un carré ]

Changements d'unités.

#### Comparaison d'aires planes:

Il s'agit de *calculer des aires à l'aide, soit de reports, de décompositions, de découpages et de recollements, soit de quadrillages et d'encadrements.*

*Des activités permettront de retenir sous la forme d'images mentales le passage du rectangle au triangle rectangle ou au parallélogramme et de mettre en place des calculs sur les aires à partir de l'aire du rectangle.*

*Evaluer à partir du rectangle l'aire d'un triangle rectangle.*

### Programme de Cinquième:

#### Travaux géométriques :

Mise en évidence de la *conservation des aires par symétrie centrale.*

Patrons de prismes droits et cylindres de révolution.

#### Gestions des données:

*Calcul de l'aire d'un parallélogramme, du triangle et du disque.*

*Evaluer à partir du rectangle l'aire d'un parallélogramme, l'aire d'un triangle.*

#### Fonctions et proportionnalité:

Thèmes de référence possibles:

-Les élèves seront familiarisés avec *l'écriture littérale des formules d'aire* :  $S=b.h$   $S=B.h/2$   
 $S=\pi.R^2$  Aire latérale d'un cylindre de révolution de périmètre de base  $p$  et de hauteur  $h$  :  
 $A=ph$ .

-*Variation de l'aire* d'un triangle ou d'un parallélogramme quand la mesure d'un côté est fixée. La variation de l'aire du disque en fonction du rayon pourra être présentée comme contre-exemple à la proportionnalité.

-Variation du volume d'un cylindre ou d'un prisme droit ( base triangulaire ou rectangulaire ) en fonction de l'aire de la base quand la hauteur est fixée ou en fonction de la hauteur quand l'aire de base est fixée.

### Programme de Quatrième:

#### Travaux Géométriques:

*Aire de la sphère.*

*Translations et rotations : conservation de l'aire.*

Polygones réguliers.

#### Gestions des données:

[Calculs sur les fractions.]

### Programme de Troisième

#### Travaux géométriques:

Propriétés de Thalès. Effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs et les aires.

Les activités de dessin et de reproduction à une échelle donnée ont mis en oeuvre, dès la cinquième le principe de la multiplication par un même coefficient.

*Des activités expérimentales dégageront l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les aires (et volumes).*

### Programme de Seconde

#### Géométrie plane

Il s'agit d'entraîner les élèves à résoudre des problèmes concernant des configurations : alignement, concours, parallélisme, orthogonalité, *calculs* de distances et *d'aires*. A cet effet, *on utilise les acquis du collège (...)* et on exploite de nouveaux outils, notamment le calcul vectoriel et sur des exemples très simples l'action des transformations.

#### Travaux pratiques

Exemples de calculs (...) d'aires sur les configurations usuelles du plan et de l'espace.

(...) On mettra en oeuvre les formules vues au collège(...).

### Programme de Première (S)

#### Géométrie

[ Même esprit concernant le programme - compléments : lieux géométriques, lignes de niveau... ]

#### Travaux pratiques

*Exemples de calculs (...) d'aires sur les configurations usuelles du plan et de l'espace.*

Pour les polygones réguliers, on se limitera à des cas simples tels que : triangle ou hexagone, carré et octogone, éventuellement pentagone et décagone. Toute technicité particulière doit être évitée dans l'étude des triangles.(...)

[ connaissances exigibles ]  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ ,  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ ,  $S = (bc \sin \hat{A}) / 2$ . On observera que ces relations permettent de caractériser simplement les triangles isométriques et les triangles semblables.

### Programme de Terminale (C)

#### I Analyse:

L'objectif est double :

-Familiariser les élèves avec *des problèmes relevant du calcul intégral* et qui, *en retour*, *donnent du sens à la notion d'intégrale* : **calculs de grandeurs géométriques (aires,**

**volumes...**) de grandeurs physiques ( calcul de distance parcourue connaissant la vitesse, valeur moyenne, valeur efficace... )

*-Fournir aux élèves le symbolisme très efficace du calcul intégral et exploiter, sur des exemples simples, les propriétés élémentaires de l'intégrale pour l'étude des fonctions.*

On **combinera** les activités de calcul exact d'intégrales (qui mettent en oeuvre le calcul de primitives) et les activités d'encadrement et de calcul approché (qui, de façon **complémentaire**, exploitent des idées géométriques à partir d'interprétations graphiques).

Intégrale d'une fonction continue sur un segment. [Extrait du contenu]

Etant donné une fonction  $f$  continue sur un intervalle  $I$  et un couple  $(a,b)$  de points de  $I$ , le nombre  $F(b)-F(a)$ , où  $F$  est une primitive de  $f$ , est indépendant du choix de  $F$ ; on l'appelle intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f$  et on le note

Dans le cas d'une fonction de signe constant, interprétation graphique de l'intégrale à l'aide d'une aire.

[Extrait du commentaire de ce contenu]

**Aucune théorie de la notion d'aire n'est au programme : on admettra son existence et ses propriétés élémentaires.** Les élèves doivent connaître l'aire des domaines usuels : rectangle, triangle, trapèze, secteur d'un disque.

Travaux pratiques:

Calcul d'intégrales par primitivation et par intégration par parties. Tout excès de technicité est exclu.

Exemples d'encadrement d'une intégrale au moyen d'un encadrement de la fonction à intégrer; exemples d'application à l'obtention d'encadrement d'une fonction. On pourra, sur des exemples simples, décrire et appliquer quelques méthodes usuelles (rectangle, point milieu, trapèzes) et comparer leurs performances. Mais aucune connaissance spécifique n'est exigible des élèves sur ces questions et toutes les indications nécessaires doivent être fournies.

*Calcul d'aires planes à l'aide du calcul intégral. Exemples de calcul de volumes de solides usuels.* Les élèves devront connaître la formule  $V=$

et savoir l'appliquer au calcul du volume d'une boule, d'un prisme droit, d'un cylindre, d'une pyramide, d'un cône.

## II Géométrie:

Calcul vectoriel et configurations (plan et espace)

Produit vectoriel; notation  $\vec{u} \times \vec{v}$  et  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ; expression dans une base orthonormale directe. Les élèves doivent savoir utiliser le produit vectoriel pour calculer l'aire d'un parallélogramme ou d'un triangle (...)

En travaux pratiques, [ on effectuera des ] calculs de distances, d'angles, d'aires et de volumes dans les configurations usuelles (polygones, cercles, coniques...) et de l'espace (prismes, pyramides, sphères, cylindres, cônes...)

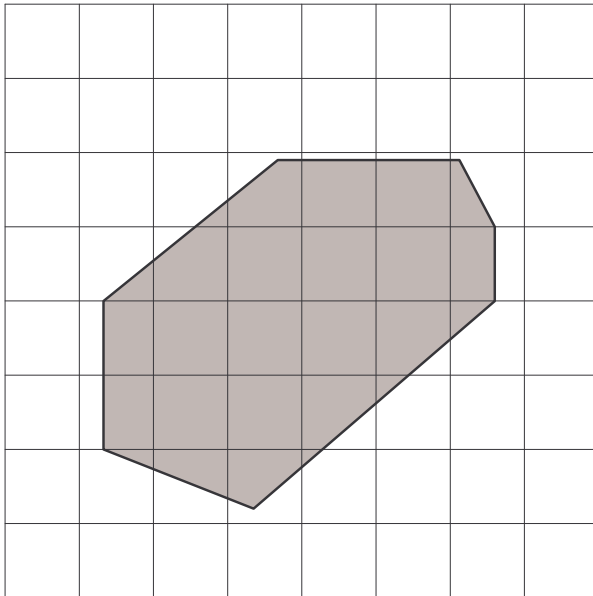
Transformations et configurations

[ Les effets des isométries, des homothéties et des similitudes sur les aires planes doivent être connus]

## Evaluation à l'entrée en Sixième

Voici l'exercice de l'évaluation en sixième de l'année 93-94 qui nous intéresse:

### Exercice 29



Regarde la surface ombrée délimitée par la ligne fermée dessinée dans ce quadrillage.

On se propose d'encadrer par deux nombres entiers l'aire  $S$  de cette surface, le carreau étant pris pour unité.

Pour cela, trace **en suivant les lignes du quadrillage** et de manière à trouver le **meilleur encadrement** possible:

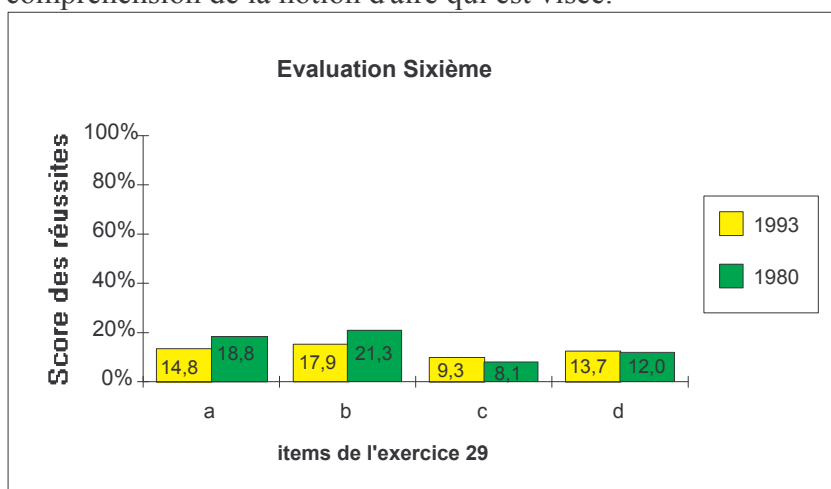
- une ligne rouge fermée, extérieure à la surface ombrée;
- une ligne fermée d'une autre couleur, intérieure à la surface ombrée.

Complète les phrases suivantes :

c. l'aire de la surface délimitée par le **trait rouge** est : .....

d. l'aire de la surface délimitée par le **trait d'une autre couleur** est : .....

L'objectif de cet exercice concernant la communication et le traitement est de répondre à des questions portant sur des comparaisons de mesures, plus particulièrement des aires. C'est la compréhension de la notion d'aire qui est visée.



Les chiffres sont ceux des résultats nationaux publiés par la Direction de l'Evaluation et de la Prospective de 1993.

A noter que l'exercice était déjà évalué en 1980 et permet donc une comparaison sans ambiguïté.

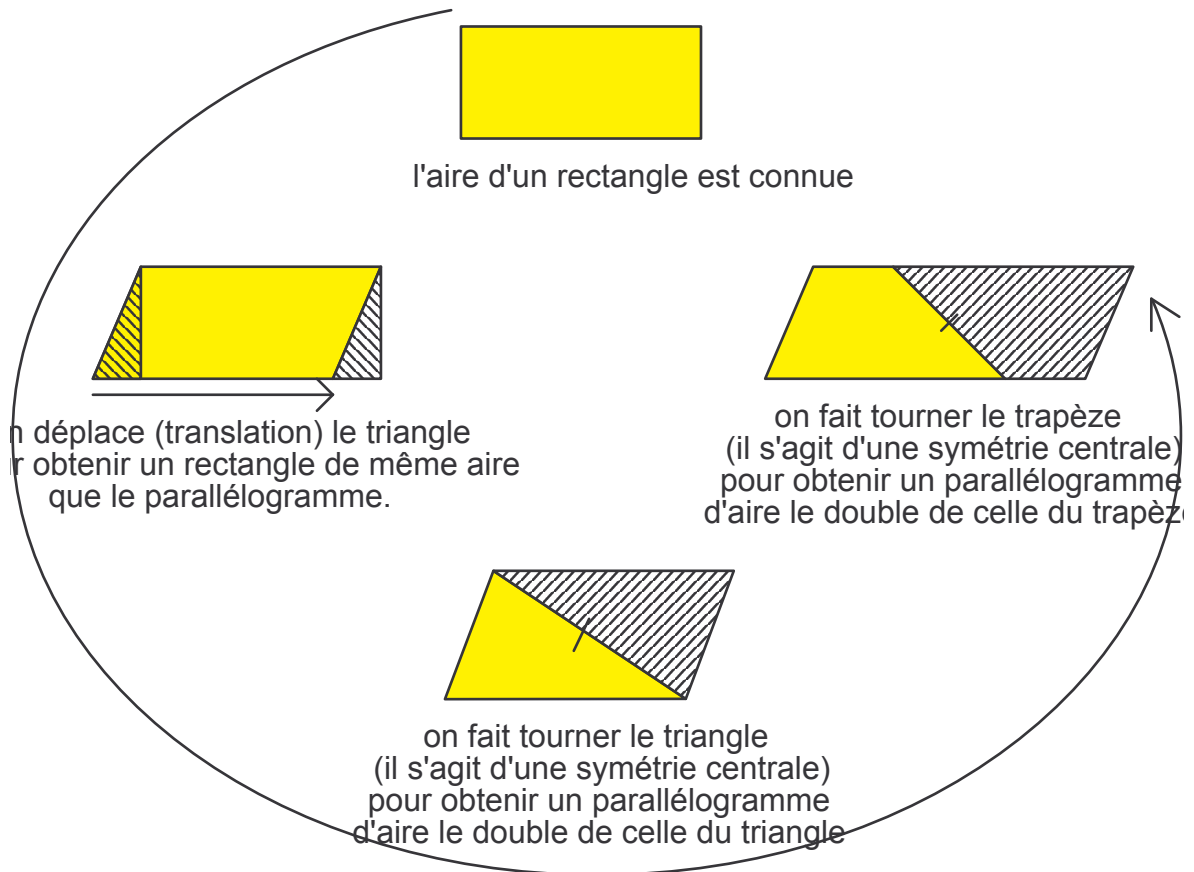
La situation n'a pas évoluée depuis 1980 :

une large majorité des élèves ( plus de 80% ) ne maîtrise pas cette notion géométrique de l'aire qui fait parti des objectifs de l'école primaire. ( voir page 6 )

On remarquera la similitude de cet exercice avec l'exercice 3 présenté page 5.

## La ronde des aires usuelles

Voici un schéma mental qui montre une progression à travers les formules d'aire:

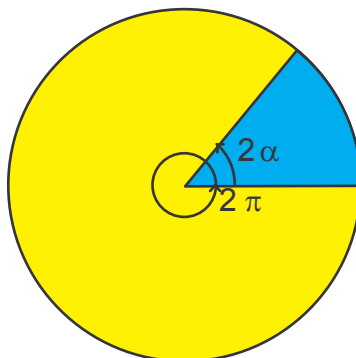


Il faut noter que l'aire du rectangle peut être *connue* soit par un comptage associé à un quadrillage soit par la formule métrique "base fois hauteur".

Par ailleurs, elle met en relief des transformations à base d'isométries.

L'aire d'un secteur angulaire pose aussi généralement problème.

Sachant que l'aire d'un disque est  $\pi R^2$ , l'aire d'un secteur d'angle  $2\alpha$  est  $\alpha R^2$  par proportionnalité. ( cela rejoint la vision des fractions sous forme de parts de gâteau )



## Devoir maison sur les aires donné en 4ème

### 4ème C. DEVOIR DE MATHEMATIQUES N°17

#### Géométrie: ( 16 points )

Nous allons au cours de ce devoir retrouver les différentes formules qui donnent l'aire du parallélogramme, du triangle, du trapèze et d'un polygone quelconque.

Pour ce faire, nous supposons connue la formule qui donne l'aire d'un rectangle ayant pour longueur  $L$  et pour largeur  $l$ . On notera  $A(ABCD)$  l'aire de ce rectangle. On a:

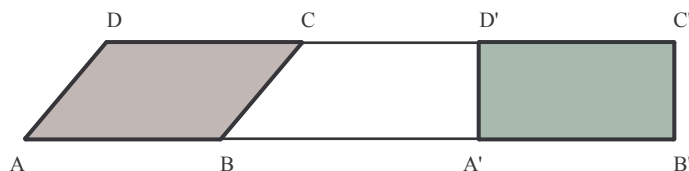
$$A(ABCD) = L \times l$$

#### 1°) Caractérisation de l'aire d'un parallélogramme. ( 5 points )

↳ Construction:

Soit un parallélogramme  $ABCD$ .

On prolonge les côtés  $(AB)$  et  $(DC)$  dans le même sens et on coupe la bande obtenue par deux perpendiculaires  $(A'D')$  et  $(B'C')$  suffisamment éloignées pour ne pas traverser l'intérieur du parallélogramme et telles que  $AB = A'B'$ . (cf. dessin ci-dessous).



a) Refaire la figure sur une feuille blanche.

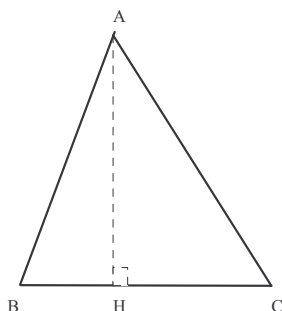
b) Par quelle translation, peut-on passer du trapèze rectangle  $AA'D'D$  au trapèze rectangle  $BB'C'C$ .

NB: Les deux trapèzes rectangles ont donc même aire.

c) Utiliser la remarque du b) pour justifier que le parallélogramme  $ABCD$  et le rectangle  $A'B'C'D'$  ont même aire.

d) En déduire la formule de l'aire d'un parallélogramme.

#### 2°) Caractérisation de l'aire d'un triangle: ( 5 points )



a) Construction:

- Construire un triangle  $ABC$  quelconque.
- Construire  $(AH)$  la hauteur issue de  $A$ .
- Mener par  $A$  la parallèle à  $(BC)$  et par  $C$  la parallèle à  $(AB)$ .
- On note  $D$  l'intersection de la parallèle à  $(BC)$  passant par  $A$  et de la parallèle à  $(AB)$  passant par  $C$ .

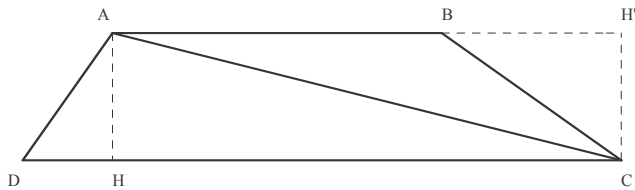
b) Que peut-on dire du quadrilatère  $ABCD$  ? ( Justifier le )

c) Exprimer alors l'aire de  $ABCD$ .

d) En déduire la formule de l'aire du triangle  $ABC$ .

3°) Caractérisation de l'aire d'un trapèze. ( 3 points)

On se donne un trapèze ABCD. NB: On ne demande pas de reproduire le dessin.



La diagonale [AC ] divise le trapèze en deux triangles:

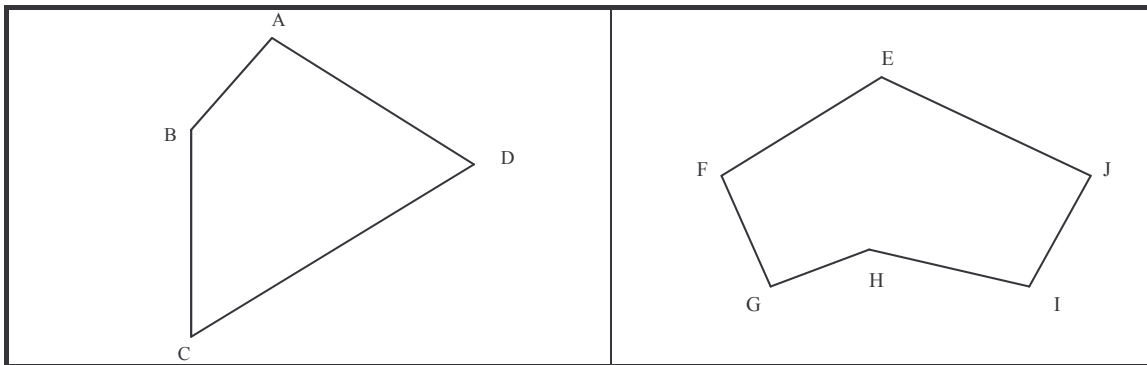
- ACD de base [CD] et de hauteur (AH);
- ACB de base [AB] et de hauteur (CH') telles que  $CH'=AH$ .

a) En utilisant le résultat du 2), exprimer l'aire du triangle ADC et l'aire du triangle ABC.

b) En déduire l'aire du trapèze ABCD ( résultat le plus simple possible pour retrouver la formule connue ).

4°) Caractérisation de l'aire d'un polygone: ( 2 points )

↗ On se donne un polygone à quatre côtés (quadrilatère) et un polygone à six côtés (hexagone). ( cf. dessin ci dessous )

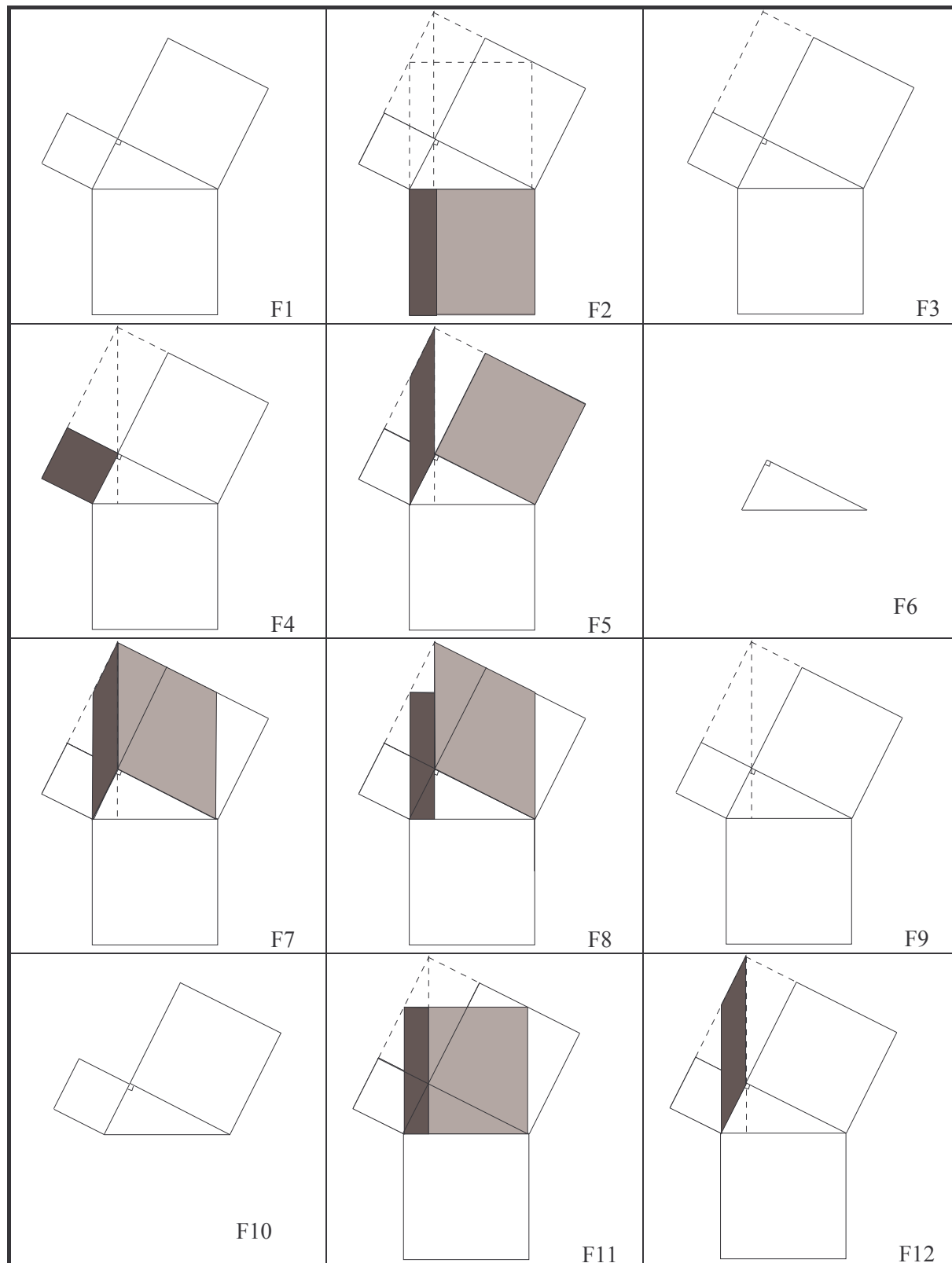


a) Tracer sur une feuille blanche un quadrilatère ABCD et un hexagone EFGHIJ.

b) " Question ouverte " : Comment peut-on calculer l'aire de ces deux polygones. ( On pourra s'aider des méthodes précédentes, un dessin peut suffire... )

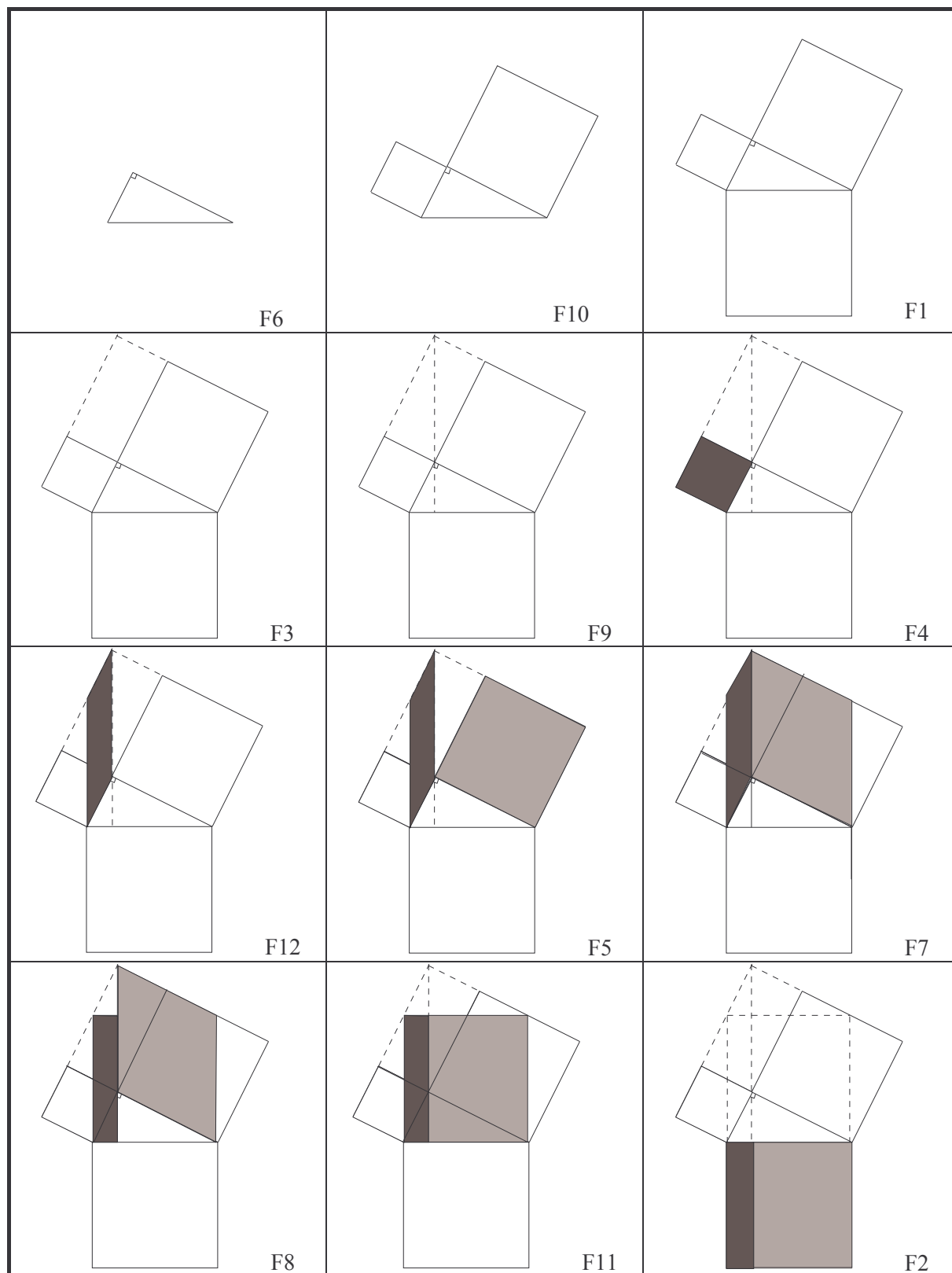
## Activité effectuée en 4ème autour des Glissements Progressifs.

↳ Retrouver les différentes séquences du film en retrouvant l'ordre des figures ci-dessous.

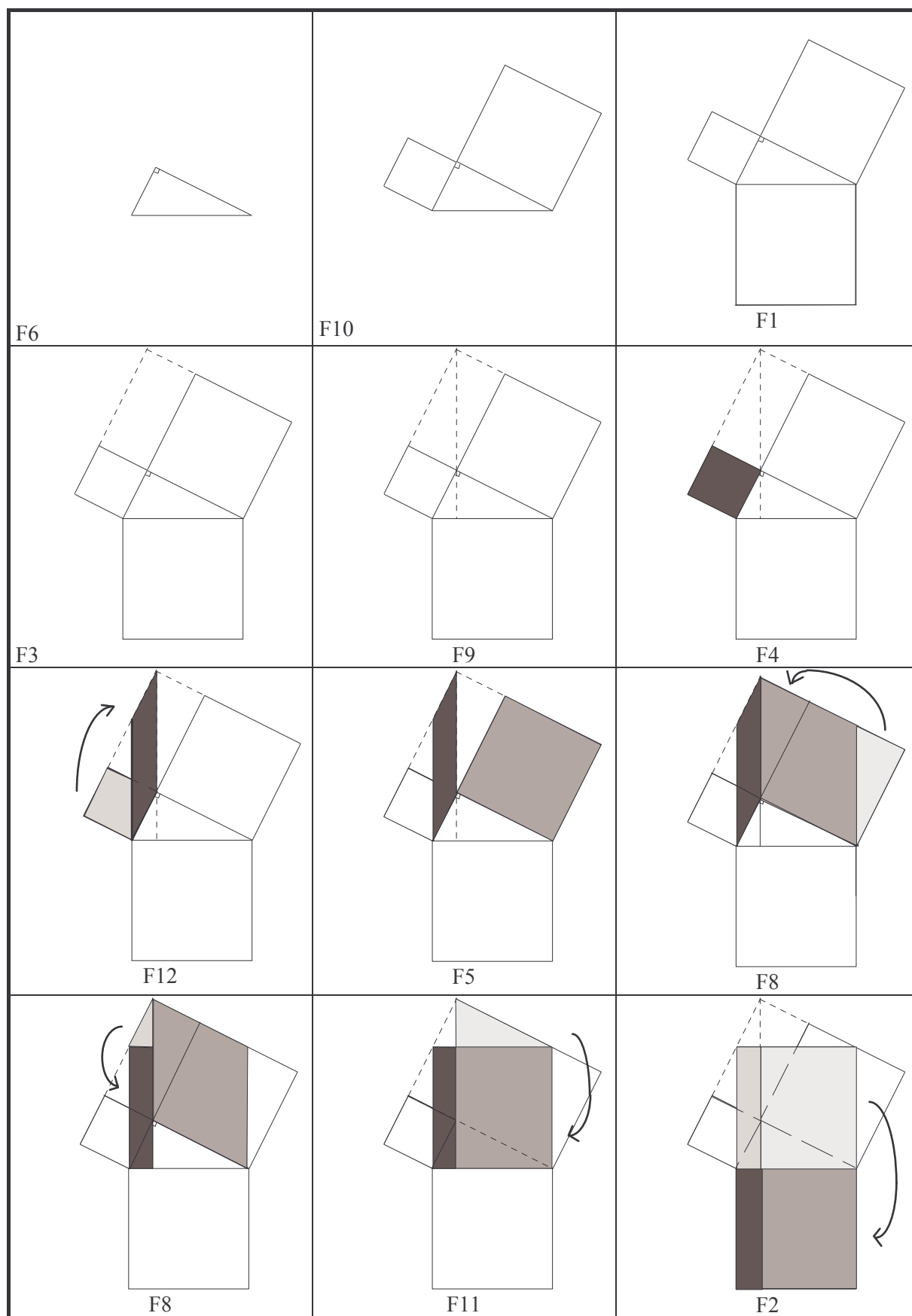


🔗 Voici maintenant les séquences dans l'ordre.

Comment peut-on justifier en quelques phrases le passage entre chaque figure ?



Voici enfin les séquences avec le détail des constructions.



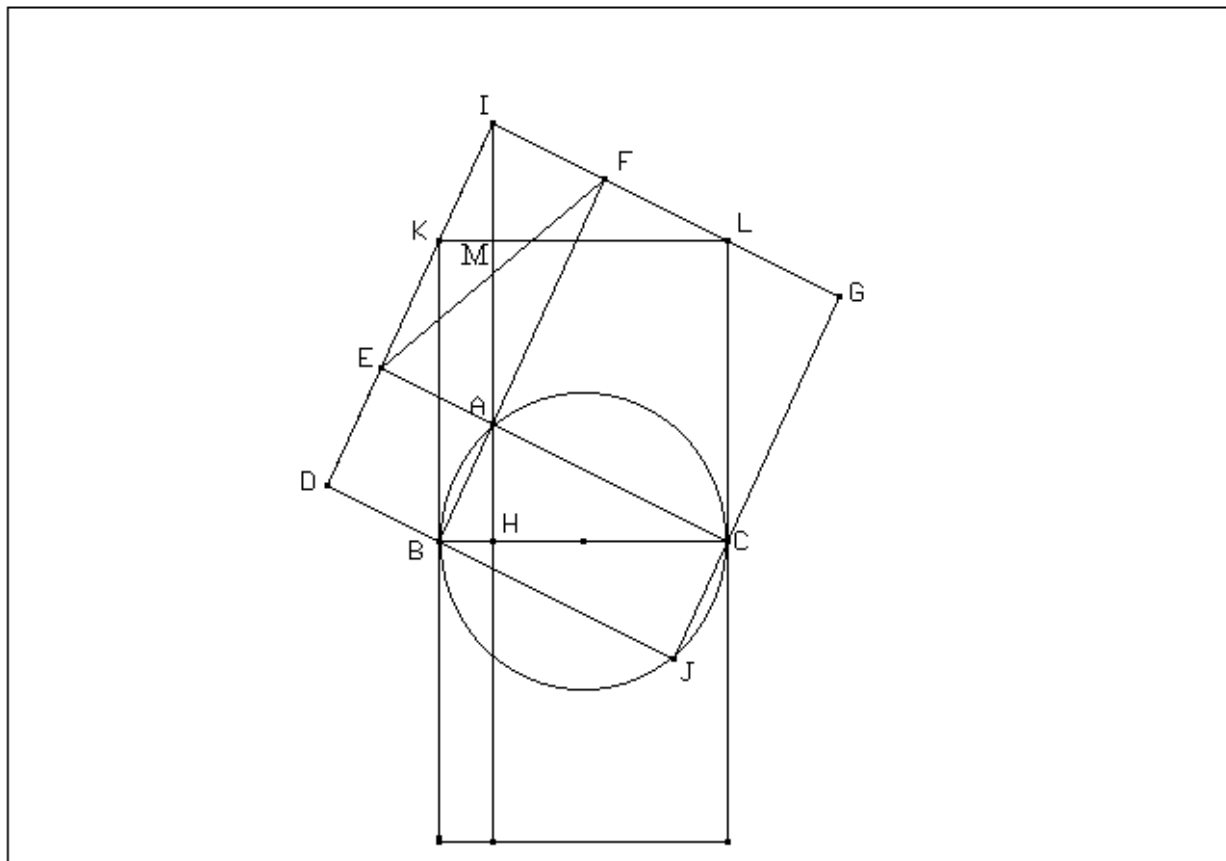
Quel théorème tente de démontrer ce film ?

Enoncer le.

## Glissements Progressifs : 1. Perpendicularité

La démonstration suivante est courte mais face à l'abondance d'information il faut avoir le courage de démarrer sur quelque chose de simple.

Pourquoi  $(AI)$  et  $(BH)$  sont-elles perpendiculaires ? (la figure du moulin)



Les diagonales  $[IA]$  et  $[EF]$  du rectangle IEAF se coupent en leur milieu M.

Les points M, A, H sont alignés et l'angle BAE est droit.

Ainsi les angles MAE et BAH sont *complémentaires*.

Le triangle MAE est isocèle de sommet M donc les angles MAE et MEA sont égaux.

La diagonale (DG) est un axe de symétrie dans le carré IDJG, donc l'angle MEA a pour image l'angle HBA puisque la droite (EF) a pour image la droite (BC) et le segment  $[EA]$  a pour image  $[BA]$ .

Ainsi les angles HBA et BAH sont *complémentaires*.

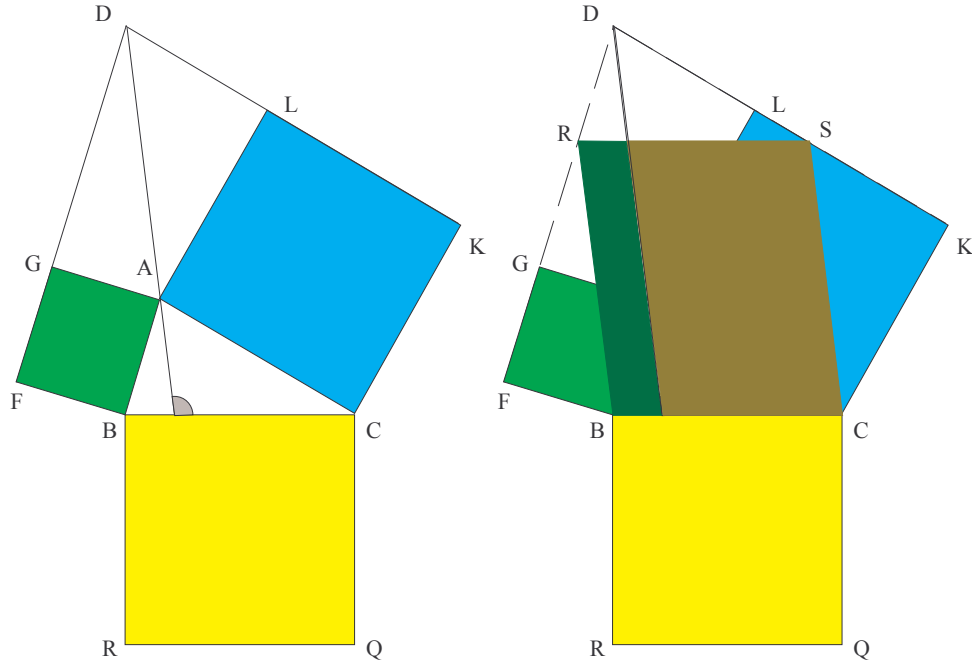
Donc l'angle AHB est droit. C.Q.F.M.

## Glissement Progressifs : 2. Et si le triangle n'est pas rectangle ?

---

Et si le triangle n'est pas rectangle

Si le triangle ABC n'est pas rectangle en A, on peut appliquer la déformation pour obtenir un parallélogramme d'aire égale à la somme des aires des petits carrés.



Le parallélogramme BCSR a des côtés de longueurs BC et DA..

En, considérant la base (BC), la hauteur du parallélogramme est égale à la longueur GL:

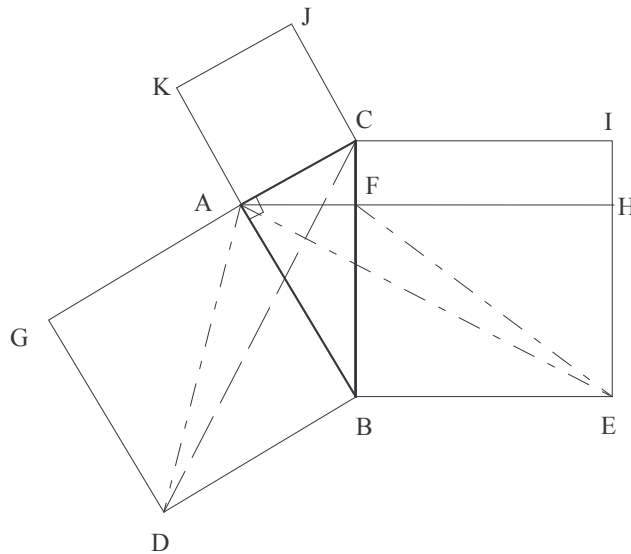
Or DA et GL ne sont pas de même longueur.

En effet, GALD sont des points du cercle de diamètre [DA]. Si  $DA=GL$  alors [GL] est un diamètre du cercle. D'où GALD serait un rectangle. Ce qui est faux.

Problème:  $GL < BC$  !!!

( à suivre ... )

## Le Théorème de Pythagore : "Démonstration d'Euclide"

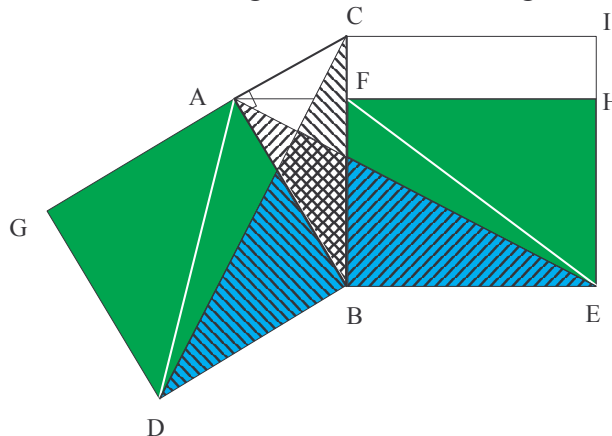


Comme (AF) est parallèle à (BE), le corollaire du théorème d'Euclide (voir page 16) montre que l'aire du triangle FBE, moitié de l'aire du rectangle BEFH, est égale à l'aire du triangle ABE.

De même, l'aire du triangle ABD, moitié de l'aire du carré ABDG, est égale à l'aire du triangle CBD.

La rotation d'angle  $90^\circ$  qui envoie D sur E montre l'égalité des aires de ABE et CBD.

Par suite, l'aire du carré ABDG est égale à l'aire du rectangle FHEB.



On montre de même que les aires du rectangle FHIC et du carré ACJK sont égales.

D'où, en identifiant la somme des aires des rectangles BEFH et FHIC à l'aire du carré BEIC, le théorème de Pythagore est démontré : dans le triangle ABC rectangle en A, la somme des aires des carrés ABDG et ACFG construits sur les côtés [AB] et [AC] est égale à l'aire du carré CBEI construit sur l'hypoténuse [BC].

En comparaison avec la "méthode vidéo", ici il n'y a plus la difficulté liée à la démonstration d'une orthogonalité (visuellement évidente, voir page 14). En contrepartie une rotation d'angle  $90^\circ$  est nécessaire, mais elle provient directement d'une orthogonalité présente dans les hypothèses.

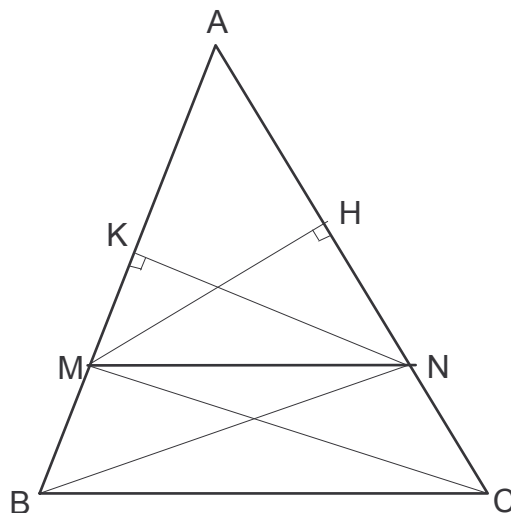
## Propriétés de Thalès.

---

### A/ Le Théorème de Thalès

Dans un triangle ABC, M et N sont respectivement des points de [AB] et [AC] tels que (MN) et (BC) sont parallèles, on a alors  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ .

Le principe va être d'identifier des aires de triangles et d'utiliser les formules d'aires pour établir le résultat algébrique.



(MN) et (BC) sont parallèles, donc d'après "corollaire" d'Euclide ( voir page 16 ), les triangles BMC et BNC ont la même aire.

Il en va de même pour les triangles MNC et MNB. Dès lors, le triangle AMC composé des triangles AMN et MNC a même aire que le triangle ANB composé des triangles AMN et MNB.

Comme (NK) et (MH) sont hauteurs respectivement de AMC et ANB, on a  $MH \times AC = NK \times AB$  ( /2 pour les aires des triangles )

$$\text{D'où } \frac{AB}{AC} = \frac{MH}{NK}.$$

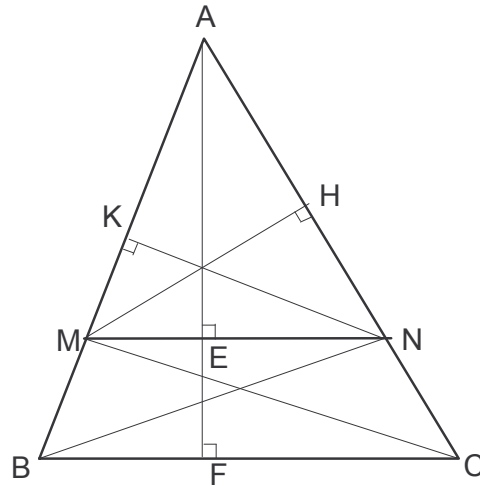
De plus, (NK) et (MH) sont hauteurs du triangle AMN. Donc  $AM \times NK = AN \times MH$  ( /2 )

$$\text{Donc } \frac{AM}{AN} = \frac{MH}{NK}$$

Des deux égalités, on tire  $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$  et le résultat  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ .

### B/ Le corollaire du Théorème de Thalès

Dans un triangle ABC, M et N sont respectivement des points de [AB] et [AC] tels que (MN) et (BC) sont parallèles, on a alors  $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ .



La hauteur issue de A dans le triangle ABC coupe (BC) en F et (MN) en E.

Le théorème de Thalès dans le triangle ABF permet d'obtenir  $\frac{AM}{AB} = \frac{AE}{AF}$ . Dans le triangle ACF on a  $\frac{AN}{AC} = \frac{AE}{AF}$ . En notant r ces rapports qui sont égaux, on a  $AM \times AN = r^2 \times AB \times AC$ .

En multipliant les deux membres de cette dernière égalité par  $\frac{1}{2} \sin \hat{A}$ , on obtient  $\frac{1}{2} \sin \hat{A} \times AM \times AN = r^2 \times \frac{1}{2} \sin \hat{A} \times AB \times AC$ .

On reconnaît de part et d'autre les aires du triangle AMN et du triangle ABC.

Or l'aire de AMN est aussi égale à  $\frac{1}{2} AE \times MN$  et l'aire de ABC s'écrit  $\frac{1}{2} AF \times BC$ .

D'où  $AE \times MN = r^2 \times AF \times BC$ . Comme  $AE = r \times BC$ , il sort  $MN = r \times BC$ .

De plus, comme  $r = \frac{AM}{AB}$ , on établit le résultat  $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ .

### C/ Une réciproque du Théorème de Thalès

Dans un triangle ABC, M et N sont respectivement des points de [AB] et [AC] tels que  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ , on a alors (MN) et (BC) sont parallèles.

On garde la figure précédente.

L'aire de ABN est  $\frac{1}{2} \sin \hat{A} \times AB \times AN$ . L'aire de ACM est  $\frac{1}{2} \sin \hat{A} \times AC \times AM$ .

L'hypothèse  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  donne  $AB \times AN = AC \times AM$ . Donc les triangles ABN et ACM ont même aire.

Dès lors les triangles (BMN) et (MNC) ont la même aire.

Or les triangles ont un côté [MN] en commun et les points B et C sont d'un même côté de (MN), ainsi les points B et C sont sur une même parallèle à (MN).

( C'est une réciproque du corollaire du théorème d'Euclide... )

On a le résultat (MN) parallèle à (BC).

## Les quadrilatères de "même aire".

### A/ Un théorème d'Euclide.

Soit  $ABC$  et  $A'BC$  deux triangles tels que  $(AA')$  et  $(BC)$  sont parallèles.

Soit  $H$  et  $H'$  les pieds des hauteurs issues de  $A$  et  $A'$  respectivement.

1° Quelle est la nature du quadrilatère  $AA'H'H$  ? (à prouver)

2° Prouver que  $ABC$  et  $A'BC$  ont même aire.

3° Faire une figure et énoncer le théorème d'Euclide.

### B/ Le problème.

On considère un quadrilatère  $ABCD$  convexe (c'est-à-dire non croisé) et  $I, J, K, L, M$  et  $N$  les milieux des côtés et des diagonales. On désigne par  $S$  le point d'intersection des diagonales et par  $O$  le quatrième sommet du parallélogramme  $MSNO$ .

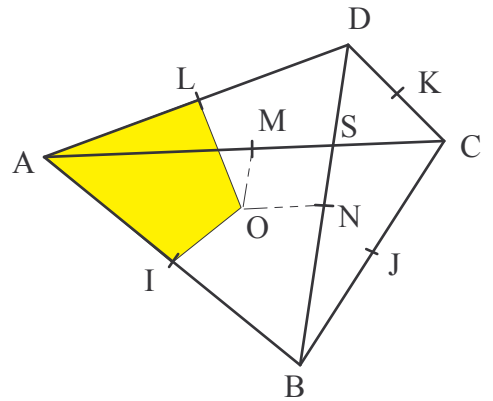
1° Comparer les aires de  $OIL$  et  $MIL$ , puis de  $OIAL$  et  $MIAL$ .

2° Trouver une transformation géométrique qui au quadrilatère  $ABCD$  associe le quadrilatère  $AIML$ .

3° Exprimer l'aire du quadrilatère  $OIAL$  en fonction de celle du quadrilatère  $ABCD$ .

4° En déduire le résultat suivant:

"Les quatre quadrilatères  $OIAL$ ,  $OLDK$ ,  $OKCJ$  et  $OJBI$  ont des aires égales".

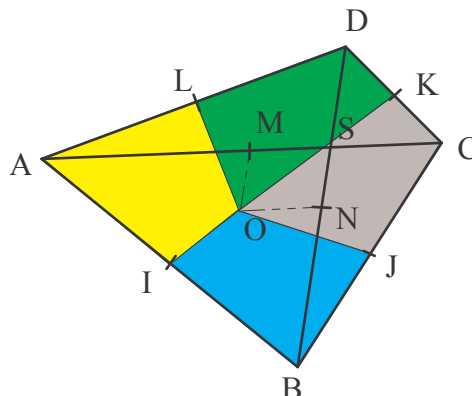


Le "théorème d'Euclide" s'applique à la question B.1°.

Certains élèves n'ont pas compris, intégré, la portée du "théorème d'Euclide". Il montre à nouveau que les triangles ont même hauteur...

A la question B.2° on met en évidence l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $0,5$  qui permet de faire la comparaison du B.3° : les aires sont multipliées par  $(0,5)^2 = 0,25$ . Un élève explique, comme on l'a dit en cours pour le triangle et le cercle pour le généraliser sans démonstration à l'aire d'une surface quelconque, que les longueurs sont multipliées par la valeur absolue du rapport de l'homothétie. Une aire s'exprime comme le produit de deux longueurs donc l'aire est multipliée par le carré du rapport.

Il faut ensuite généraliser la procédure à partir de  $B, C$  et  $D$  pour obtenir le B.4°, ce n'est pas facile.



## La quadrature de la parabole en Première

Voici un énoncé possible pour un devoir sur la quadrature de la parabole.

Soit  $\mathcal{P}$  la parabole d'équation  $y=kx^2$  ( $k$  réel non-nul) dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On désigne par A et B deux points distincts de  $\mathcal{P}$  d'abscisses respectives  $a$  et  $b$ .

On pourra faire une figure avec  $k=1$ ,  $a=-2$  et  $b=1$ .

### I. Quelques propriétés d'une parabole.

1. Montrer que le milieu I de [AB] a même abscisse que le point d'intersection J des tangentes en A et B à la parabole  $\mathcal{P}$ .

2. Prouver que le milieu M de [IJ] appartient à  $\mathcal{P}$  et que la tangente en M à  $\mathcal{P}$  est parallèle à (AB).

### II. Application à une construction d'une parabole.

Etant donnés 2 points A et B d'une parabole  $\mathcal{P}$  et leurs tangentes, en déduire la construction d'un autre point de la parabole et de sa tangente.

Quelle "partie" de la parabole peut-on ainsi construire point par point ? Expliquer la procédure à suivre et l'appliquer à  $\mathcal{P}$  pour le cas  $k=1$ ,  $a=-2$  et  $b=1$ .

### III. Quadrature de l'arc d'une parabole.

Soit R le milieu de [AI] et S le milieu de [BD]. La tangente en M à  $\mathcal{P}$  coupe (AJ) en C et (BJ) en D. (CR) coupe  $\mathcal{P}$  en E et (SD) coupe  $\mathcal{P}$  en F.

1. Montrer que l'aire du triangle AMB est égale à la moitié de l'aire de AJB.

En déduire que l'aire de AEM est la moitié de l'aire de ACM.

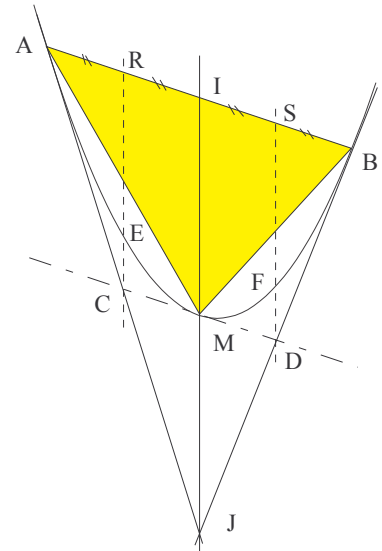
2. Quelle est la nature du quadrilatère CMIR ?

3. Prouver que l'aire de ACM est la moitié de l'aire de AIM.

On pourra montrer que l'aire de ICM est la moitié de l'aire de AIM.

4. En déduire que l'aire de AEM est le quart de l'aire de AIM.

5. Montrer de manière analogue que l'aire de BMF est le quart de l'aire de BIM.



6. En déduire que l'aire du polygone AEMFBA est égale à  $\left(1 + \frac{1}{4}\right)a(\text{AMB})$ . ( $a(\text{AMB})$  désigne l'aire du triangle AMB).

7. On réitère le procédé  $n$  fois pour obtenir un polygone à  $(2n+1)$  côtés inscrit dans l'arc de parabole. Montrer que l'aire de ce polygone est égale à  $\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}\right)a(\text{AMB})$ .

8. Montrer que  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ . En déduire la limite quand  $n$  tend

vers  $+\infty$  de l'aire des polygones inscrits dans l'arc de parabole.

9. Comment interpréter le résultat précédent ?

10. En déduire pour  $k=1$ ,  $a=0$  et  $b=1$ , l'aire de l'arc de parabole et l'aire du domaine  $D = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x^2\}$

Une résolution rapide:

I. 1° 2A(a,a²) B(b,b²) milieu I de [AB] :  $(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2})$ .

2° Tangente en A à P :  $T_A: [y-a^2=2a(x-a)]$  soit  $T_A: [y=2a(x-a)+a^2]$

2° Tangente en B à P :  $T_B: [y-b^2=2b(x-b)]$  soit  $T_B: [y=2b(x-b)+b^2]$

2° Le point J intersection de  $T_A$  et  $T_B$  a pour coordonnées par élimination:

$$0=2x(a-b)-a^2+b^2 \text{ d'où } x=\frac{a+b}{2}$$

$$y(b-a)=ab(-a+b) \text{ d'où } y=ab \quad (a \neq b)$$

2° 2° Coordonnées de M milieu de [IJ] :  $(\frac{a+b}{2}, \frac{(a+b)^2}{4})$ . Donc MUP.

2° Le coefficient de directeur (repère...) de la tangente en M est (a+b).

$$\text{Celui du segment [AB] est } [(a \neq b)] : \frac{b^2-a^2}{b-a}=(a+b).$$

Les droites sont donc parallèles.

II. La tangente  $T_M$  en M recoupe  $T_A$  et  $T_B$  en 2 points C et D. Le milieu du segment [AM] et le point C forment un segment dont le milieu F appartient à la parabole et de tangente parallèle à (AM). De même le milieu de [BM] et D forment un segment dont le milieu F est sur la parabole et a pour tangente la parallèle à (BM).

On recommence alors les constructions à l'aide des couples de tangentes  $(T_A, T_E)$ ,  $(T_E, T_M)$ ,  $(T_M, T_F)$ ,  $(T_F, T_B)$ . Et ainsi de suite...

Le point M se trouve entre A et B sur l'arc de parabole. Le point E est entre M et A, donc entre A et B. Le point F est entre M et B, donc entre A et B. ... Tous les points construits sont entre A et B.

On fait en quelque sorte une construction par dichotomie des points de l'arc de parabole : entre 2 points, on construit un point "milieu".

III.

De 1 à 7 on se référera au mémoire page XXXI et suivantes.

$$8. 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} = 1x \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \quad (\text{résultat sur la somme des termes d'une suite})$$

géométrique ou à redémontrer si on le fait en activité présentant une telle suite)

$$\text{Après simplification, on obtient } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

Comme  $\frac{1}{4}$  est plus petit que 1,  $\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$  tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

D'où l'aire des polygones tend vers  $\frac{4}{3}a(AMB)$ .

9. Comme l'aire des polygones est une approximation de l'aire du segment de parabole de plus en plus fine et que la limite même de la ligne polygonale est l'arc de parabole, l'aire trouvée est l'aire de l'arc de parabole.

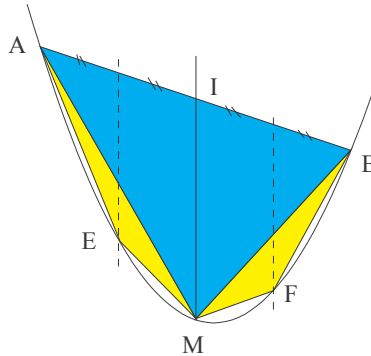
10. Le plaisir du calcul est laissé au lecteur. On trouve dans un repère orthonormal:  
 $a(ABA)=\frac{1}{6}$  et  $a(D)=\frac{1}{3}$  ( unité d'aire ).



## La quadrature du segment de parabole par Archimède

( Adapté de "La quadrature du segment de parabole" par M. DOFAL , article E8 de "Enseigner les mathématiques" , CRDP d'Orléans )

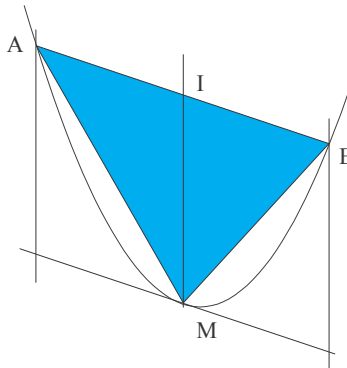
A partir du triangle ABM, on construit les triangles analogues sur [AM] et [BM]. On itère ainsi le procédé.



Archimède établit sans problème que  $T_n = \Delta + \frac{\Delta}{4} + \dots + \frac{\Delta}{4^{n-1}} = \frac{4}{3}\Delta - \frac{\Delta}{3 \times 4^{n-1}}$  où  $\Delta$  désigne l'aire du triangle ABM et  $T_n$  la somme des aires des triangles.

En construisant le parallélogramme sur le côté [AB] et la tangente en M, il apparaît que le triangle ABM épuise plus de la moitié de l'aire P du segment de parabole :

$$\Delta < P < 2\Delta \quad \text{donc} \quad \Delta > \frac{P}{2}$$



Cette remarque joue un rôle fondamental dans la méthode dite " d'exhaustion ".

Elle permet d'utiliser la Proposition 1 du Livre X des Eléments d'Euclide ( cette proposition est aussi connue sous le nom d'Axiome d'Archimède ):

" En soustrayant de la plus grande des deux grandeurs données plus de sa moitié, du reste plus de sa moitié etc., on peut arriver à une grandeur moindre que la plus petite grandeur ".

En raisonnant deux fois par l'absurde, on montre que P ne peut être ni supérieur ni inférieur à  $\frac{4}{3}\Delta$  :

La première hypothèse est  $P > \frac{4}{3}\Delta$ .

On pose donc  $P = \frac{4}{3}\Delta + U$ , la grandeur U étant alors inférieure à P.

On construit alors une suite de triangles inscrits dans l'arc de parabole.

Comme à chaque étape, les triangles épuisent plus de la moitié du reste, il va exister un entier  $n_0$  à partir duquel ce reste sera inférieur à la grandeur  $U$ .

Donc  $P - T_{n_0} < U$ . D'où  $\frac{4}{3}\Delta < T_{n_0}$  et alors  $\frac{4}{3}\Delta < \Delta + \frac{\Delta}{4} + \dots + \frac{\Delta}{4^{n_0-1}}$ .

Cette dernière inégalité est clairement absurde.

La première hypothèse est  $P < \frac{4}{3}\Delta$ .

On pose  $D = \frac{4}{3}\Delta - P$ .

On arrive alors après construction des triangles à un rang  $n_0$  tel que  $\frac{\Delta}{4^{n_0-1}} < D$ .

Il sort alors  $\frac{4}{3}\Delta = P + D$  et  $P + D > T_{n_0} + D$  (on a  $T_{n_0} < P$ )

Ainsi  $\frac{4}{3}\Delta > \frac{4}{3}\Delta - \frac{\Delta}{3 \times 4^{n_0-1}} + D$  et donc  $D > \frac{\Delta}{4^{n_0-1}}$ .

Ceci est absurde de part le choix de rang  $n_0$ .

D'où la démonstration de  $P = \frac{4}{3}\Delta$  par double réduction par l'absurde.

## Une approche possible du calcul intégral

Extrait de l'article "Comment l'histoire des mathématiques peut nous dévoiler une approche possible du calcul intégral" par André STOLL, de l'IREM de Strasbourg, paru dans Repère n°11 d'avril 1993.

Définir une intégrale dans une classe de lycée ou de BTS est une chose difficile. La définir, comme on peut le lire dans certains manuels, en posant  $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$  me semble inacceptable. Comment, en partant de cette définition, un élève peut-il comprendre le lien entre le calcul intégral d'une part, la recherche d'un centre d'inertie ou d'une aire d'autre part ?

Deux millénaires ont été nécessaires à la mise au point du calcul infinitésimal. La méthode d'exhaustion des géomètres grecs (Euclidien Eudoxe, Archimède...) améliorée par les savants arabes, les "*découpages*" de Fermat et Pascal sont à la portée d'un élève de première. Exploitions ces méthodes !

**Remarque importante** : il n'est évidemment pas question ici de détailler les méthodes d'Archimède, de Ibn-Qurra ou de Fermat, mais comme le titre l'indique, d'introduire la notion d'intégrale dans une classe de Terminale ou de BTS. On utilisera ainsi, le plus possible, les connaissances et le "savoir-faire" des élèves et en particulier la géométrie analytique, les notions d'équation d'une courbe et de limites, la démonstration par récurrence et... la calculatrice.

### La Quadrature de la parabole par Archimède

(...)

Archimède déclare: "*J'ai découvert ce théorème, d'abord par des considérations de mécanique, et ensuite par des raisonnements géométriques*".

(...)

### Quadrature et Cubature par Thabit-Ibn-Qurra et Ibn-Al-Haytham

(...)

Thabit-Ibn-Qurra (836-901) et Ibn-Al-Haytham (965-1040), plus connu en Europe sous le nom d'Alhazen traduisent en arabe les oeuvres des géomètres grecs. Ils maîtrisent parfaitement les méthodes d'Archimède. Thabit-Ibn-Qurra réussit la quadrature de la parabole en découpant la surface à évaluer par des droites non équidistantes mais choisies de façons à simplifier le calcul des sommes partielles. Quant à Alhazen, il envisage le calcul du volume du solide engendré par rotation autour de différents axes d'un segment de parabole.

(...)

### La Quadrature de la Parabole et de l'Hyperbole par Fermat et par Pascal

(...)

Pierre Simon de Fermat (1601-1665) mathématicien français est conseiller au parlement de Toulouse. Il partage avec Pascal la découverte du calcul des probabilités et imagine en même temps que Descartes les principes de la géométrie analytique.

Fermat exploite les propriétés des progressions géométriques pour quarrer "*les paraboles et les hyperboles à l'infini*".

Blaise Pascal (1623-1662) mathématicien, physicien, philosophe et écrivain français. On lui doit notamment les lois de la pression atmosphérique, le principe de la pression hydraulique, la théorie de la roulette. Pour quarrer la parabole, Pascal construit des rectangles de largeur  $d$ , en calcule l'aire et explique qu'il est possible de négliger certains termes quand le nombre de rectangles augmente indéfiniment (c'est-à-dire quand  $d$  tend vers 0).

(...)

### Conclusion

(...)

S'il n'est évidemment pas question de détailler la théorie de l'intégrale dans une classe de lycée, on peut toutefois en exploiter ses richesses et entre autres :

1. Etablir un lien entre le calcul intégral et le calcul des dérivées. (En langage géométrique : le calcul de l'aire d'une surface et la recherche de tangente sont deux problèmes inverses l'un de l'autre).

2. S'il est possible de trouver une primitive  $F$  de la fonction  $f$ , on calcule l'aire en posant  $F(b)-F(a)$ . Sinon on fait un calcul approché en choisissant un entier  $n$ , le plus grand possible et on partage le segment  $[a,b]$  en  $n$  segment de même longueur  $\Delta x$

(...)

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = (b-a)/n$$

$$\text{et on calcule } \sum_{k=0}^n f(x_k) \Delta x.$$

(...)

La définition de l'intégrale s'introduit alors très naturellement en posant

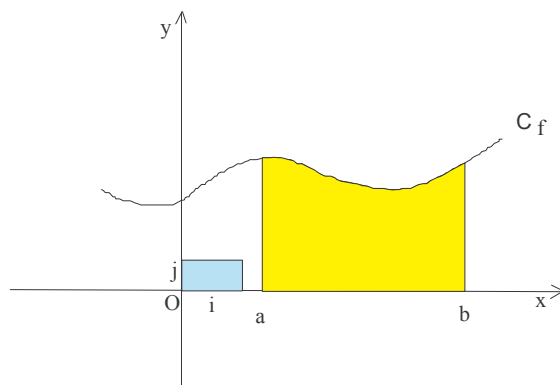
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

## Activité préparatoire à la notion d'intégrale - Terminale D.

Durée 2 heures.

Préliminaire: Objectif de la séance.

L'unité d'aire étant l'aire du rectangle de base, on veut montrer que:



*Une Aire, comme celle du domaine grisée sur la figure ci-contre, est égale à  $F(b) - F(a)$ , où  $F$  est la primitive de la fonction continue  $f$  représentée par la courbe  $f$ .*

Remarque: Sur le dessin ci-contre,  $\|\vec{i}\| \neq \|\vec{j}\|$

Pour ce faire, nous allons travailler en trois étapes.

Première étape:

Nous allons chercher à trouver l'aire de certains domaines et voir que les notions sur les aires et volumes en notre possession sont assez vite obsolètes.

Dans l'exemple 3, nous rappellerons que calculer l'aire d'un domaine, c'est "comparer" le domaine à l'unité de base.

Nous essayerons alors d'obtenir une évaluation approximative de l'aire de ce domaine.

Deuxième étape:

A l'aide d'un exemple, nous allons montrer que l'énoncé donné en préliminaire est juste.

Troisième étape:

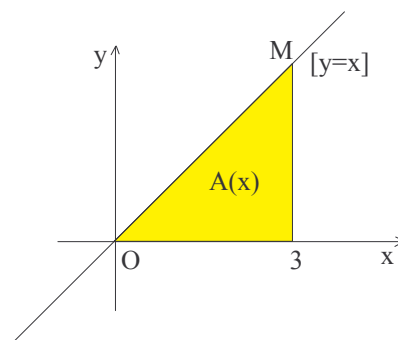
Nous reprendrons l'étude des fonctions de l'étape 1, et nous allons confronter les résultats du 1) avec la méthode du 2).

### Première étape: ( 20 minutes )

Calculer  $A(x)$  l'aire du domaine délimité par (Ox), la courbe d'équation  $y=f(x)$ , l'axe (yy') et la parallèle à (Oy) passant par le point M de  $C_f$  d'abscisse 3 pour:

$$f_1: x \mapsto x \quad ; \quad f_2: x \mapsto 2 \quad ; \quad f_3: x \mapsto x^2 \quad .$$

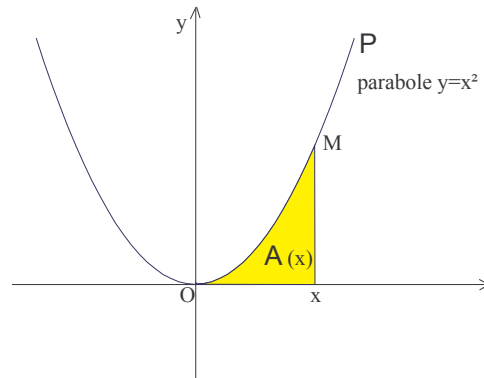
Exemple:  $f_1: x \mapsto x$  :



**Deuxième étape: ( 60 minutes)**

Nous allons nous intéresser à la fonction  $f_3$ .

Nous allons calculer l'aire du domaine suivant:



☞ On munit le plan d'une distance en choisissant pour unité de longueur le cm. L'unité d'aire est donc le cm<sup>2</sup>.  
Soit  $C_f$  la représentation graphique dans un repère orthonormal de  $f_3: x \mapsto x^2$   
On s'intéresse au cas  $x > 0$ .

1) Pour tout  $x > 0$ , on considère l'aire hachurée ci-dessus.

Nous **admettrons** qu'il y a une aire qui s'exprime dans l'unité choisie par un réel  $A(x)$ .

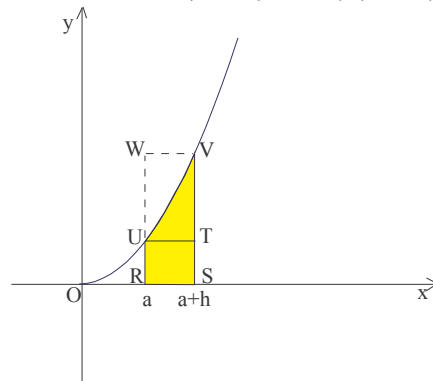
Nous définissons ainsi sur  $[0, +T[$  une fonction  $A: x \mapsto A(x)$ .

En particulier, on pose  $A(0)=0$ .

Nous allons montrer que sur cet intervalle,  $A$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en zéro.

1) En utilisant la figure ci-dessous:

Montrer que:  $\forall h > 0 \quad ha^2 \leq A(a+h) - A(a) \leq h(a+h)^2$



2) De même, montrer que:

Si  $h < 0$  et

on a:  $-h(a+h)^2 \leq A(a) - A(a+h) \leq -ha^2$ .

( On pourra tracer une figure similaire à celle tracée ci-dessus ).

3) Dédire de 1) et 2) que:

Si  $h \neq 0$  et  $(a+h) > 0$  on a:  $a^2 \leq \frac{A(a+h) - A(a)}{h} \leq (a+h)^2$

4) En déduire que  $A$  est une fonction dérivable en  $a > 0$  et que  $A'(a)=f_3(a)$ .

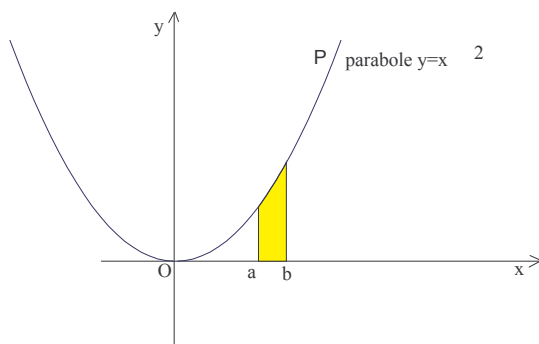
NB: On montrerait de même que  $A$  est dérivable en 0 et que  $A'(0)=0$ .

☞ On en déduit que  $A$  est une primitive de  $f$  sur  $[0, +T[$ .

→ Déterminez alors  $A$ . ( on utilisera les notions étudiées cette année sur les primitives ).

5) Application: Calculer l'aire  $\mathcal{A}(x)$  pour  $x=3$

6) On souhaite maintenant connaître l'aire  $\mathcal{A}$  comprise entre les droites  $[y=a]$ ,  $[y=b]$ , l'axe  $(Ox)$  et la courbe  $C_f$  ( Voir dessin ci-dessous ).



Montrer que  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(b) - \mathcal{A}(a)$ .

Retrouve-t-on le résultat annoncé au début de l'activité ?

Définition: ( 10 minutes )

On appelle *intégrale* de  $a$  à  $b$  de la fonction continue  $f$  sur un intervalle  $I$ , le réel  $F(b) - F(a)$  où  $F$  est une primitive de  $f$ . On note l'intégrale de  $a$  à  $b$  de  $f$  par le symbole suivant:

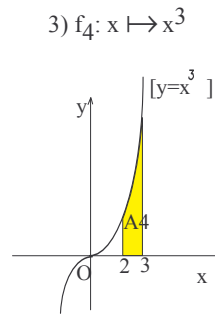
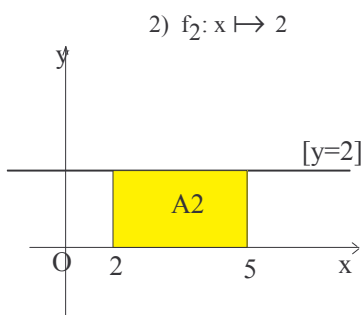
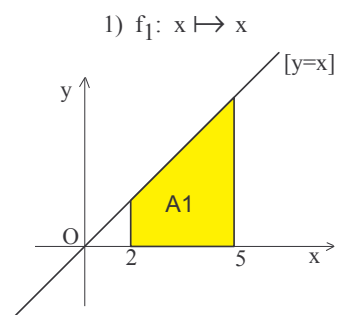
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Troisième étape: ( 20 minutes )**

Sur des exemples, nous allons vérifier le résultat énoncé précédemment.

Calculer l'intégrale des fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  entre  $a=2$  et  $b=5$  et l'intégrale de  $f_4$  entre  $a=2$  et  $b=3$ .

On vérifiera dans les deux premiers cas que cette intégrale représente bien l'aire des domaines  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  hachurés ( Voir figures ).



## Application de l'intégrale à l'électricité : les calculs

---

L'intensité du courant alternatif est décrite par  $I(t) = I_m \cos(\omega t)$ .

Le premier problème pour les élèves a été de trouver la période d'une telle fonction. Certains n'ont pas encore vu le rapport avec la période  $2\pi$  de la fonction cosinus.  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Le travail calorifique en continu pendant le temps  $T$  est  $R \cdot I_{\text{eff}}^2 \cdot T = R \cdot I_{\text{eff}}^2 \cdot \frac{2\pi}{\omega}$ .

En classe la formule du travail en alternatif a été fournie par le professeur comme étant  $R \cdot \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t) dt$

L'identification des 2 travaux donne  $I_{\text{eff}}^2 \frac{2\pi}{\omega} = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_m^2 \cos^2(\omega t) dt$

d'où  $I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_m^2 \cos^2(\omega t) dt$ .

On reconnaît la valeur moyenne de la fonction "Carré de Intensité en alternatif" sur une période.

La linéarisation de "  $\cos^2$  " donne  $I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_m^2 \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t)) dt$

D'où  $I_{\text{eff}}^2 = I_m^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(2\omega t) dt \right) (*)$

La dernière intégrale est nulle, ceci a été vu par primitivation de  $\cos(2\omega t)$ , mais peut s'envisager par considération de l'intégrale de la fonction cosinus sur une période.

D'où  $I_{\text{eff}}^2 = I_m^2 \left( \frac{1}{2} \right)$

Ainsi  $I_{\text{eff}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

---

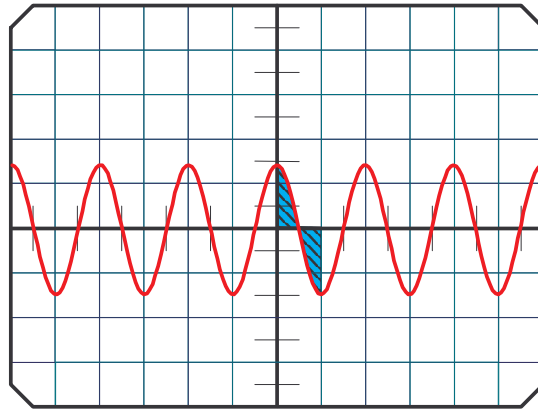
### L'aire des creux est des bosses:

---

On veut montrer que les aires sous les bosses et dans les creux de la fonction "cosinus au carré" sont les mêmes.

Pour cela, il faut réaliser que, pour tout  $x$ ,  $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ . Ainsi le lien entre cette fonction et la fonction cosinus n'est pas d'ordre 2, mais d'ordre 1, à la périodicité près.

Donc la fonction est impaire, périodique de période  $\pi$ . Ceci restreint le domaine d'étude à  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .



Pour décrire l'aire des "creux" en terme d'intégrale, on peut d'abord déplacer la courbe, c'est-à-dire faire une translation de vecteur  $-\frac{\vec{j}}{2}$ .

On doit donc étudier la fonction  $g: t \mapsto \frac{\cos(2t)}{2}$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , plus particulièrement,

montrer que  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t) dt = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) dt$ . Les aires algébriques sont opposées. En Terminale, l'aire associée à une fonction négative est l'opposée de son intégrale. Les notions d'aires algébriques sont sous-jacentes mais on ne les met pas en avant.

La proposition est clairement vraie lorsque l'on primitive la fonction  $t \mapsto \cos(2t)$ .

Donc on a gagné !

Remarque : En Terminale le changement de variable n'est plus disponible. Mais on aurait pu simplement montrer que le point  $(\pi, 0)$  est centre de symétrie pour la courbe en prouvant facilement que  $\cos(2t) = \cos(2(\pi - t))$ .

Les transformations associées aux fonctions ont été mise à contribution : translation.... On aurait pu aussi montrer que le point d'abscisse  $\frac{\pi}{4}$  est centre de symétrie de la courbe sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

A noter que la fonction associée au "travail en alternatif sur une période T" est le produit de la fonction g par une constante :  $I_m^2$ . Sa courbe représentative est donc l'image de la courbe de g par une affinité d'axe (Ox) et de rapport  $I_m^2$ . Donc l'aire sous la courbe sera multipliée par  $I_m^2$  qui est positif. C'est l'interprétation géométrique d'une partie de la linéarité de l'intégrale pour les aires:  $\forall \lambda \in \mathbb{A}, \int_a^b \lambda \cdot f(t) dt = \lambda \cdot \int_a^b f(t) dt$ .

---

**Application à l'irrationalité de e**

---

**Partie A :** Limite de  $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$

---

Soit  $u_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n e^{-x} dx$  pour  $n$  positif. ( $0! = 1$ )

1. Calculer  $u_1$  puis montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \frac{1}{n!} + u_{n-1}$ .

2. En déduire que  $u_n = 1 - \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$ .

3. Montrer que  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$ .

4. On note  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ . Déduire de ce qui précède que la limite de  $(s_n)$

et que  $0 < e - s_n < \frac{1}{(n+1)!}$ .

**Partie B :** Irrationalité de e.

---

On pose  $t_n = s_n + \frac{1}{n \times n!}$ .

1. Quelle est la limite de  $(t_n)$ .

2. Prouver que  $(s_n)$  est strictement croissante et que  $(t_n)$  est strictement décroissante. En déduire  $s_n < e < t_n$ .

3. a) Soit  $q$  un entier. Montrer que  $q! \cdot s_q$  est entier.

b) On suppose que  $e$  est irrationnel, c'est-à-dire de la forme  $\frac{p}{q}$  avec  $p$  et  $q$  entiers.

Montrer qu'alors  $p \cdot q! - q! \cdot s_q$  est un entier appartenant à  $]0; 1[$ .

Conclure.

L'énoncé est suffisamment clair : il met en place la trame de la démonstration.

L'intégration par parties de l'intégrale établit une relation de récurrence sur la suite  $(u_n)$ . Le théorème d'intégration d'un encadrement permet de minorer la suite par 0 et majorer le terme général de la suite par le terme général d'une suite qui tend vers 0. D'après la question 2 qui utilise la relation de récurrence, la suite  $(s_n)$  proposée s'exprime directement en fonction de  $(u_n)$  et elle a pour limite le réel  $e$ .

Dans la partie B, on met en évidence une deuxième suite qui permet d'encadrer  $e$  à la question 2. Celle-ci est exploitée au 3 au rang  $q$  lorsqu'on suppose  $e$  rationnel. On obtient alors qu'il existerait un entier entre 0 et 1, autre que 0 et 1. Ceci est faux. La seule hypothèse faite étant la rationalité de  $e$ ,  $e$  est par conséquent irrationnel.

## **Oral : Enchaînement sur le théorème de Pythagore:**

---

Le jour de l'oral, la présentation s'est effectuée en deux parties recentrées sur l'activité de Terminale D.

Christophe a commencé par une introduction fixant nos objectifs : la citation de Freudenthal ... ( voir introduction du mémoire )

Il a présenté l'activité de Terminale D.

Il a ensuite repris le devoir présenté en 4ème, puis a fait le lien avec ce qui est vu en primaire. Il a orienté son discours sur les apports ou lacunes vis à vis de l'activité de Terminale.

Ensuite Emmanuel a pris le relais :

En 4ème nous avons présenté une démonstration du théorème de Pythagore s'appuyant sur un petit film vidéo de l'IREM intitulé "Glissements Progressifs".

(Page 12). Dans ce film, on considère un triangle rectangle et on construit sur ses côtés des carrés. On déforme ensuite les carrés construits sur les côtés de l'angle droit en parallélogramme (séquences F7 et F9) puis en rectangles (séquences F10 et F11) pour obtenir par recollement un carré qui s'emboîte dans le carré construit sur l'hypoténuse.(séquence F12). Il en ressort que dans un triangle rectangle, la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit est égale à l'aire du carré construit sur l'hypoténuse. L'expression de l'aire des carrés en fonction de la longueur de leur côté permet d'énoncer le théorème de Pythagore pour un triangle ABC rectangle en A donnant une relation sur les longueurs des côtés du triangle rectangle.:  $BC^2=AB^2+AC^2$ .

Cette présentation a été observée dans 2 classes de quatrième : une bonne et une plus faible. Nous l'avons aussi présentée dans une 4ème difficile, où, pour maintenir l'attention, un support papier a en plus été utilisé. Cela est présenté en annexe page VIII : les principales séquences du film sont présentées dans le désordre et il faut les réordonner en cohérence avec le déroulement du film.. Ceci est repris page IX où les élèves doivent décrire par une phrase les différents événements mis en évidence par le film.

Que ce soit directement face au film ou par le support papier, les élèves réagissent rapidement et se prennent au jeu. Ce sont eux qui expriment ce que leur montre le film.

Notamment pour la séquence F7, le carré colorié en vert se déforme progressivement vers le parallélogramme en gardant sa couleur verte. En questionnant les élèves sur ce que représente la couleur, verte pour ce cas ou bleu pour l'autre, un élève parle d'un liquide coloré qui remplit le carré et qui remplit encore le parallélogramme sans déborder. Les élèves conviennent que s'agissant de figures planes, la couleur représente l'aire des figures. La vision du premier élève est intéressante car elle fait ressortir que l'aire est quelque chose de fixe, de figé donc qu'on ne peut pas vraiment déformer, d'où l'allusion à un liquide qui se prête mieux à une déformation.

Par ailleurs, le film suggère dans la séquence F7 que l'aire du carré est la même que l'aire du parallélogramme. Mais est-ce vrai ? Il faut le prouver !

Les élèves sont tentés de parler d'une translation. Mais la translation d'un carré conserve bien les aires mais donne un carré et non un parallélogramme. Ici seul un côté du carré se déplace et engendre la déformation : on dira que le carré glisse progressivement vers le parallélogramme. D'où le titre du film.

Pour démontrer la conservation de l'aire par cette transformation, beaucoup d'élèves font alors référence aux formules d'aire du carré et du parallélogramme.:  $\text{côté} \times \text{côté}$  et  $\text{base} \times \text{hauteur}$ . Puis ils identifient un côté du carré comme étant une base du parallélogramme. En montrant que la hauteur du parallélogramme et l'autre côté forment un rectangle, on peut identifier la longueur du côté du carré avec la hauteur du parallélogramme. D'où la démonstration.

Ce réflexe de faire avant tout appel aux formules d'aires a aussi été observé comme l'a dit Christophe dans le devoir sur les formules d'aire présenté en 4ème. Les élèves se raccrochent aux formules alors que l'aspect géométrique permet de se concentrer sur la conservation des aires et ce sans formule ni calcul (voir page VI).

Par ailleurs, en décortiquant les séquences de la vidéo, on fait sentir aux élèves la nécessité de démontrer ce que l'on observe. Une difficulté a été de vouloir démontrer la perpendicularité des droites (AD) et (BC) (figure page 13).

Le déroulement de la vidéo montre visuellement bien que les droites doivent être perpendiculaires; mais le démontrer est loin d'être aussi évident.

Pour en terminer avec cette présentation du théorème de Pythagore, un effet parasite de cette présentation est apparu chez certains élèves. Pour eux le théorème de Pythagore est resté le résultat sur les aires des carrés. Ils n'ont pas fait le passage au longueur et n'ont donc pas le théorème sous sa forme algébrique la plus efficace. Il faut très tôt dans la présentation du film écrire le théorème dans son énoncé définitif, surtout pour une classe difficile.

Ainsi en découpant un carré par des rectangles on a réussi à obtenir un théorème important de la géométrie. Mais jusqu'alors, la manipulation des aires se fait essentiellement sur des figures rectilignes : des quadrilatères et au pire des polygones.

En outre, comme le montre bien l'exercice de CM2 page 5 ou l'exercice de l'évaluation en 6ème page IV mesurer l'aire limitée par une figure courbe n'est pas facile. Tout au plus arrive-t-on à obtenir une approximation de sa mesure, mais jamais sa valeur exacte. Cette difficulté est d'autant plus grande que contrairement que mesures de longueurs, il n'y a aucun instrument qui permette d'accéder rapidement à cette mesure d'une aire.

Il y a donc un cap à franchir.

C'est ce que nous voulons aborder dans l'étude de la quadrature d'un segment de parabole développée page 17 et suivantes. Page XV de l'annexe nous présentons

l'énoncé d'un devoir que nous aurions voulu présenter en 1ère E lors de la première année d'IUFM.. Cependant les élèves n'avaient pas encore abordé la notion de suite et le professeur n'avait pas prévu un tel travail avant l'épreuve orale du CAPES. Seules les parties I et II ont été observées au travers d'un DNS.

Actuellement une telle étude pourrait être faite en 1ère en module ou en T.D. dans le cadre de l'étude des suites.

Le début du problème met en évidence de manière analytique les propriétés nécessaires des tangentes à la parabole: le milieu I d'un segment de droite formé par 2 points A et B d'une parabole joint à l'intersection J des tangentes à la parabole en ces points coupe la parabole en un point M qui est le milieu du segment [IJ]. De plus, la tangente à la parabole au point M est parallèle au segment [AB].

Ainsi muni de ce théorème, on découpe le domaine formé par le segment [AB] et l'arc de parabole AB à l'aide du triangle ABM. On obtient une première approximation de l'aire du segment de parabole. Ensuite on découpe les domaines restants à l'aide de triangle du même type que ABM, améliorant ainsi l'approximation.

On met alors en place une suite de polygones formés par recollement de ces triangles. Cela se rapproche de l'étude des polygones de Christophe. Mais cela débouche surtout sur la suite numérique des aires de ces polygones ( voir page 19). Il faut d'ailleurs noter que cette suite est en fait une série puisque à chaque étape on améliore la précision par ajout d'un terme de même nature : on fait la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

Au passage, on crée ainsi une situation de référence pour l'objet mental série, notion qui n'est pas étudiée pour elle-même dans le secondaire mais largement développée dans le supérieur. Par ailleurs, ici on a une visualisation du phénomène numérique par un phénomène correspondant en géométrie.

Mais on crée aussi une situation de référence pour la notion d'aire.

En effet l'exercice prend toute sa valeur lorsque, dans l'étude de la suite, il faut passer à la limite. Ce passage numérique ne pose pas de gros problème car la suite est agréable. Du fait de l'interprétation géométrique qui va de pair avec cette suite numérique et qui décrit bien son comportement, les élèves devraient faire d'eux-mêmes l'identification de cette limite avec la mesure de l'aire du segment de parabole.

Faire appel aux suites pour étudier une aire est intéressant et peut largement être exploité en 1ère et en Terminale. Néanmoins la difficulté reste d'apprivoiser l'infini et ses situations paradoxales, mais ceci est l'objet je crois d'un autre mémoire professionnel.

Par ailleurs, trouver la limite d'une suite n'est pas toujours simple et facile. On peut ainsi faire sentir la nécessité d'avoir un outil plus performant encore : l'intégrale.

Dans la quadrature de la parabole, le découpage se fait en tenant compte de la forme de la parabole (voir page 20). On voit que lors du T.D. en Terminale les élèves voulaient aussi tenir compte de la forme de la parabole : ils avaient construits un polygone

épousant la forme globale de la parabole à l'aide de droites compromises entre tangente et corde. Mais le choix de telles droites pose problème.

On est finalement revenu à un découpage de la surface à l'aide de carreaux de plus en plus petit.

Cependant, pour préparer le T.D., on aurait pu faire appel à un découpage qui s'y rapproche: le découpage laminaire. C'est un tel découpage qui débouche sur la méthode des rectangles puis la méthode des trapèzes, méthodes numériques d'approximation de l'aire du domaine sous la courbe représentative d'une fonction continue.

Un tel découpage est intéressant car une nouvelle fois il prépare la présentation de l'intégrale de Riemann au programme des classes prépas ou du Deug.

Mais à plus court terme, il permet la description du domaine associé à une fonction continue, en faisant appel à un processus issu de l'étude des suites et facilement programmable par les élèves. C'est une méthode accessible aux élèves. Dès lors l'aire du domaine associé à une fonction continue prend du sens pour l'élève.

Une telle présentation de l'intégrale contourne un peu la logique qui transparaît des programmes. En effet, voir page III, les textes officiels disent : " on combinera des activités de calcul exact d'intégrales (...) et les activités d'encadrement et de calcul approché " - en cela on respecte le programme mais il est dit : "( qui de façon complémentaire, exploitent des idées géométriques ...)". Il semble que les activités péri-intégrales ne puissent être envisagées qu'après la définition axiomatique du théorème fondamental de l'analyse :  $\int_a^b f(t)dt = F(a) - F(b)$ , pour une fonction  $f$  continue sur  $[a,b]$  dont  $F$  est une primitive.

Il est à noter que dans notre activité, le théorème est démontré. Cela est possible car les élèves ont la capacité d'accepter l'existence d'une aire pour le domaine associé à une fonction. Cela a déjà été expliqué par Christophe.

Tout comme l'affirme vigoureusement André Stoll dans un article de Repère ( voir page XX des annexes ), nous trouvons peu satisfaisant de débiter le calcul intégral en imposant le Théorème Fondamental de l'analyse.

Cette logique est néanmoins appliquée. En Terminale C, le théorème fondamental a été défini suite à l'étude des primitives et les activités de calcul approché ont fait l'objet d'une séance de TD une fois le cours complètement terminé. Cette séance n'a pu être observée, mais son intérêt paraît limité si ce n'est pour voir toutes les méthodes possibles et en comparaître la performance sur des exemples. Cependant c'est à notre avis un peu tard, car l'exploitation du domaine numérique est pertinent lors de la construction et de l'étude des propriétés de l'intégrale. Elle permet de donner du sens à des propriétés souvent très abstraites dans leur formulation mais pas tant par leur interprétation.

Certes, cela respecte la logique des programmes comme il est écrit en bas de la page II : une telle activité peut donner du sens à la notion d'intégrale, et ce, en retour, mais ne serait-il pas plus utile à l'élève d'en sentir le sens à priori ?

Par ailleurs, cela éviterait des réactions observées sur l'exercice de la page 29. Cet exercice a été présenté en Terminale C, une fois le cours sur l'intégrale bouclé. On

demande aux élèves de calculer l'aire du domaine ombré pour en déduire la valeur de l'intégrale?

Malgré un texte explicite, tous les élèves ont commencé par considérer l'intégrale pour décrire le domaine ( c'est le moyen le plus précis pour obtenir la mesure de l'aire d'un domaine ). Toutes les méthodes de calcul de l'intégrale ont été essayées : triturage de la fonction, recherche de primitive évidente, intégration par parties. Il a fallu suggérer de s'intéresser à une description plus géométrique de la surface pour qu'enfin la situation se débloque. Cependant, il n'est pas sûr que les élèves donnent en retour du sens à l'intégrale considérée. Pour eux, un tel exercice apparaît comme un piège, il faut en passer par là mais ce n'est pas la peine de chercher à comprendre.

Nous ne l'avons pas développé dans ce mémoire, faute de place et de temps, mais on retrouve de tels problèmes dans l'étude des volumes. Généralement les élèves ont du mal à découper des solides en tranches. Un solide, c'est du solide, pourquoi le découper en tranches ?

En conclusion, nous avons voulu montrer au travers de cet exposé en quoi l'intégrale en Terminal est une sorte d'aboutissement dans la formation des élèves. Tout au long de son cursus, l'élève acquiert des situations de référence liées essentiellement à l'objet mental aire. Ces situations permettent à l'élève de comprendre et d'accepter l'intégral en tant que nouvel objet mental. Il est alors en position de force pour comprendre la portée de ce nouvel outil. De plus on a pu entrevoir que cette pratique que nous proposons conditionne le cursus de l'élève non seulement à court terme mais aussi à plus long terme. Comme le dit A. Freudenthal, " dans l'enseignement, il faut commencer par les objets mentaux pour aboutir aux concepts". Mais il faut savoir rester humble. Aboutir à des concepts tels que l'intégrale est difficile et il faut se dire que " si l'élève en reste aux objets mentaux, il part avec un bagage sérieux. "

